EFFET FACTORIEL (J3, L)
(19 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **effet factoriel** désigne l'influence d'un **facteur** (eg un **facteur expérimental**) sur une **variable d'intérêt** (ou résultat d'une **expérience aléatoire**). Cet effet dépend de la façon dont le **phénomène** étudié est modélisé (cf **modélisation**, **spécification**).

(i) Ainsi, dans un **modèle d'analyse de la variance** à deux **facteurs** F et G, écrit sous une forme usuelle, en notant $x_{ijn(i,j)}$ pour repérer l'observation (i, j, n_{ij}) de η :

(1) $y_{ijn(i,j)} = m_{ij} + u_{ijn(i,j)}$, $\forall\ n_{ij} \in \{1 ,..., N_{ij}\}, \forall\ (i, j) \in \{1 ,..., I\} \times \{1 ,..., J\}$,

avec E $u_{ijn(i,j)} = 0$ et C $(u_{ijn(i,j)} , u_{\alpha\beta n(\alpha,\beta)}) = \delta_{(i,j)(\alpha,\beta)} . \sigma_u^2$, on dispose de I . J paramètres $(m_{ij})_{(i,j)}$ représentables par un vecteur $m \in \mathbf{R}^{I\ J}$.

(ii) On peut « reparamétrer » ce modèle en définissant :

(a) l'**effet moyen**, ou **effet d'ensemble**, ou **effet global** :

(2) $\beta^0 = m..$, avec $m.. = (I . J)^{-1} . \Sigma_{i=1}^{I} \Sigma_{j=1}^{J} m_{ij}$;

(b) l'**effet principal**, ou **effet propre**, attaché à la modalité i du facteur F :

(3) $\beta_i^1 = m_i. - m..$, avec $m_i. = J^{-1} . \Sigma_{j=1}^{J} m_{ij}$,

(c) l'**effet principal**, ou **effet propre**, attaché à la modalité j de G :

(4) $\beta_j^2 = m._j - m..$, avec $m._j = I^{-1} . \Sigma_{i=1}^{I} m_{ij}$;

(d) si les facteurs F et G intéragissent, l'**intéraction entre modalités** i de F et j de G :

(5) $\beta_{ij}^{12} = m_{ij} - (\beta^0 + \beta_i^1 + \beta_j^2) = m_{ij} - (m_i. + m._j) + m..$.

On peut définir une **application linéaire** (qui est aussi une **application injective**) λ entre les deux espaces de paramètres selon :

(6) $m_{ij} = \beta^0 + \beta_i^1 + \beta_j^2 + \beta_{ij}^{12}$,

puisque l'on dispose de 1 + I + J + I.J paramètres de type β, soit un vecteur d'ensemble $\beta \in \mathbf{R}^{1 + I + J + I.J}$.

Autrement dit, en notant m le vecteur des m_{ij} :

(7) $\beta = \lambda (m)$, avec $\lambda \in$ Mono $(\mathbf{R}^{IJ}, \mathbf{R}^{1 + I + J + I.J})$,

où Mono (E, F) est l'**espace des monomorphismes** (applications linéaires injectives) de E dans F (cf **homomorphisme**).

De plus, λ est bijective s'il existe 1 + I + J **contraintes** linéaires indépendantes sur β, prises parmi les 2 + I + J contraintes redondantes ($\forall$ (i, j)) :

$$\Sigma_{i=1}^{I} \beta_i^1 = 0, \qquad \Sigma_{j=1}^{J} \beta_j^2 = 0,$$

(8)

$$\Sigma_{i=1}^{I} \beta_{ij}^{12} = 0, \qquad \Sigma_{j=1}^{J} \beta_{ij}^{12} = 0$$

(cf **estimabilité**, **modèle d'analyse de la variance**, **singularité**).