EFFICACITÉ ASYMPTOTIQUE (G4, G11)
(19 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le principe statistique consistant à ne considérer que des règles de décision asymptotiquement efficaces est appelé **principe d'efficacité asymptotique** (cf eg **estimateur asymptotiquement efficace**). Une notion d'**efficacité asymptotique** souvent utilisée est la suivante.

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta})^{\otimes N}$ un **modèle d'échantillonnage** à distance finie ($N \in \mathbf{N}^*$), considéré comme plongé dans le modèle d'échantillonnage asymptotique $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta})^{\otimes \mathbf{N}}$, avec $\Theta \subset \mathbf{R}^Q$ (cf **modèle asymptotique**). Soit $g : \Theta \mapsto \mathbf{R}^K$ une **application mesurable** et, $\forall N \in \mathbf{N}^*$, δ_N une **règle de décision pure** définie par :

(1) $\quad X(\omega) = x \mapsto \delta_N(x) \in D,$

où $D \subset \mathbf{R}^K$ est l'**ensemble** des décisions et $X = (X_1, ..., X_N)$ la **va** dont la **loi** est $(P^\xi)^{\otimes N}$ (**échantillon iid** de taille N).

On suppose que :

(a) la (Q,K)-**matrice** Δ_θ, de terme général :

(2) $\quad \delta_{qk}(\theta) = (\partial g_q / \partial \theta_k)(\theta), \quad \forall (q, k) \in N_Q^* \times N_K^*,$

existe dans un voisinage $\mathcal{V}_{\theta^*}$ de la **vraie valeur** θ^* du **paramètre** $\theta \in \mathrm{Int}(\Theta)$ (ie que l'application g est de classe C^1 sur $\mathcal{V}_{\theta^*}$) (cf **différentiabilité**) ;

(b) la (Q,Q)-**matrice d'information** de FISHER $I(\theta)$ existe et est régulière, ie $I(\theta) \in R_Q(\mathbf{R})$ (espace des **matrices régulières**).

On dit alors que $\delta = (\delta_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ est une **suite de règles de décision (pures) asymptotiquement efficace** pour le paramètre $\tau = g(\theta)$ ssi, $\forall \theta \in \mathcal{V}_{\theta^*}$:

(3) $\quad N^{1/2} . (\delta_N(X) - g(\tau)) \to^{\mathcal{L}}_{N \to +\infty} \mathcal{N}_K(0, \Sigma(\theta))$

(**loi normale multidimensionnelle**), où $\Sigma(\theta) = D_\theta \{I(\theta)\}^{-1} D_\theta'$ est la borne inférieure (au sens des **formes quadratiques**) de l'**inégalité de CRAMER-DARMOIS-FRÉCHET-RAO**.

(ii) On s'affranchit parfois de la définition précédente (qui contient l'hypothèse de **normalité**) en définissant l'**efficacité asymptotique** de δ comme la **convergence en loi** du premier membre de (3) vers une loi dont les deux premiers **moments** sont $(0, \Sigma_\theta)$, comme précédemment.

Cependant, la suite δ est souvent (eg lorsque le **théorème de la limite centrale** s'applique) asymptotiquement gaussienne (cf **normalité asymptotique**).