EFFICACITÉ ASYMPTOTIQUE D'UNE SUITE DE TEST (G4, I6)
(14 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Soit $X = (X_1, ..., X_N)$, un **échantillon iid** engendré par une **loi** P_θ^X, où $\theta \in \Theta$ et $\Theta \subset \mathbf{R}$, $\alpha_N(\theta)$ le **risque de première espèce**, $\beta_N(\theta)$ le **risque de seconde espèce** et $\eta_N(\theta) = 1 - \beta_N(\theta)$ la puissance associés à un test φ (cf **puissance d'un test**).

(i) Pour tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta < \theta_0$ (resp $\theta \geq \theta_0$, resp $\theta = \theta_0$), il n'existe pas, en général, à distance finie (ie lorsque $N << +\infty$), de **test uniformément le plus puissant** et de même **seuil** $\alpha_N(\theta_0)$.

(ii) On considère donc les performances comparées des tests d'un point de vue asymptotique (ie lorsque $N \to +\infty$).

Si $\varphi = (\varphi_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de tests associés à des **échantillons** X de taille $N \in \mathbf{N}^*$ et tq :

(1) $\lim_N \eta_N(\theta) = 1-$, avec $\theta \neq \theta_0$,

on dit que φ est une **suite convergente de tests**, ou (improprement) un **test convergent**.

Aussi grand que soit N, il peut exister $\theta \neq \theta_0$ tq $\eta_N(\theta) < 1$. On étudie donc la fonction $(N, \theta) \mapsto \eta_N(\theta)$ lorsque $\theta \to \theta_0$ ou lorsque $N \to +\infty$, ce qui conduit à différentes **mesures de l'efficacité asymptotique** pour φ, tq les suivantes (C.R. RAO) :

(a) $e_1 = \lim_N \inf N^{-1} \{(d\eta_N / d\theta)(\theta_0)\}^2\}$;

(b) $e_2 = \lim_N \inf N^{-1} \{(d^2 \eta_N / d\theta^2)(\theta_0)\}$;

(c) $e_3 = - \lim_{\theta \to \theta(0)} \inf \{\lim_{N \to +\infty} \inf \{2 N^{-1} (\theta - \theta_0)^{-2} \operatorname{Log} \beta_N(\theta)\}\}$ (où $\theta(0)$ désigne θ_0) ;

(d) $e_4 = \lim_N \inf \eta_N \{\theta_0 + N^{-1/2} \gamma\}$ (où γ est fixé a priori).

(iii) Ces mesures caractérisent asymptotiquement le comportement local de la fonction puissance η_N au voisinage du point $\theta = \theta_0$. Si $I_1(\theta)$ est l'**information de FISHER** apportée par une **observation** (eg par ξ) sur θ, si Φ est la **fr** de la **loi normale réduite** $\mathcal{N}(0, 1)$, si $\alpha \in]0, 1[$ et si q_α est le **quantile** d'ordre α de $\mathcal{N}(0, 1)$, on montre que :

(a) $e_1 \leq \{(2\pi)^{-1} I_1(\theta)\}^{1/2} \exp(- q_\alpha^2 / 2)$;

(b) $e_2 \leq I_1(\theta)$;

(c) $e_3 \leq I_1(\theta)$;

(d) $e_4 < 1 - \Phi\ \{q_\alpha - \gamma\ (I_1(\theta))^{1/2}\}$.

On appelle e_4 l'**indice d'efficacité asymptotique de E.J.G. PITMAN**.