EFFICACITÉ DE BAHADUR (G4, I6)
(18 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'**efficacité de BAHADUR** est une **efficacité relative** asymptotique relative à une **suite** de tests (cf **efficacité relative asymptotique entre tests**).

(i) Soit ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) un **modèle image** dont on teste l'**hypothèse de base** :

(1) $H_0 : \theta \in \Theta_0$

contre l'**hypothèse alternative** complémentaire :

(2) $H_1 : \theta \in \Theta_1$, avec $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$.

Soit $(T_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ une **suite** de **statistiques de test** $T_N = t_N(X)$ candidates pour tester H_0 , où $t_N : \mathcal{X} \to \Theta$ est une **application mesurable**, $\forall\, N \in \mathbf{N}^*$. On pose, $\forall\, N \in \mathbf{N}^*$:

(3)
$$F_N(t) = \inf_{\theta \in \Theta 0} P_\theta([T_N < t]),$$
$$L_N = 1 - F_N(T_N),$$

où $\Theta 0$ désigne, par commodité, Θ_0 .

Soit $L' = (L_N')_{N \in \mathbf{N}^*}$ et $L'' = (L_N'')_{N \in \mathbf{N}^*}$ deux suites resp associées à deux suites de statistiques de test $T' = (T_N')_{N \in \mathbf{N}^*}$ et $T'' = (T_N'')_{N \in \mathbf{N}^*}$.

On suppose qu'il existe des fonctions positives $c' : \Theta_1 \to \mathbf{R}_+^*$ et $c'' : \Theta_1 \to \mathbf{R}_+^*$, appelées **pentes exactes** de L' et L'', tq :

(4) $\lim_N N^{-1} \operatorname{Log} L_N = - c(\theta) / 2$, P_θ-p.s., $\forall\, \theta \in \Theta_1$,

où L_N (resp θ) représente indifféremment L_N' ou L_N'' (resp θ' ou θ'').

On appelle alors **efficacité relative (asymptotique) (au sens de R.R. BAHADUR)** de T' pr à T'' au point $\theta \in \Theta_1$ le rapport :

(5) $e_\theta(T' / T'') = c'(\theta) / c''(\theta)$.

T' est plus efficace (au sens de BAHADUR) que T'' en θ ssi $e_\theta(T' / T'') > 1$.

(ii) Soit :

(6) $\Lambda_N(\theta_0 , \theta_1) = f(X, \theta_0) / f(X, \theta_1)$, $\forall\, (\theta_0 , \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$,

le **rapport des vraisemblances**. On montre que le rapport :

(7) $K(\theta_0 , \theta_1) = \lim_N N^{-1} \operatorname{Log} \Lambda_N(\theta_0 , \theta_1)$,

est presque sûrement fini, au sens où :

(8) $|K(\theta_0 , \theta_1)| < +\infty$, P_θ-p.s., $\forall \theta \in \Theta_1$.

On dit alors que T est une **suite asymptotiquement optimale** (au sens de BAHADUR), ou une **suite BAHADUR-optimale**, ssi sa pente exacte est tq :

(9) $c(\theta) = 2 . J(\theta_1)$, $\forall \theta_1 \in \Theta_1$,

avec $J(\theta_1) = \inf_{\theta 0 \in \Theta 0} K(\theta_0 , \theta_1)$ (où $\theta 0 \in \Theta 0$ désigne encore $\theta_0 \in \Theta_0$).