EFFICACITÉ RELATIVE ASYMPTOTIQUE ENTRE RÉGIONS DE CONFIANCE (G4, H5)
(21 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Deux **régions de confiance** de même **niveau** ont généralement (à distance finie $N < +\infty$) une **précision** différente. Leur efficacité relative est alors définie à partir de ces précisions. En passant à la limite ($N \to +\infty$), on définit la notion d'**efficacité relative asymptotique entre régions de confiance** (eg entre intervalles de confiance).

(i) Dans le cas d'intervalles, on considère un **modèle image** $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ et une **fonction numérique** mesurable $g : \Theta \mapsto \mathbf{R}$ (cf **application mesurable**). On suppose que $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ est un espace puissance de la forme $(\mathcal{X}_0^N, \mathcal{B}_0^{\otimes N})$, que X est un **échantillon iid** comme la **va** $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}_0$ (**variable parente**) et qui suit la **loi** P_θ^X : ie $P_\theta^X = (P_\theta^\xi)^{\otimes N}$, $\forall (\theta, N) \in \Theta \times \mathbf{N}^*$.

Soit alors $S' (X) =]a' (X), b' (X)[$ et $S'' (X) =]a'' (X), b'' (X)[$ deux intervalles de confiance (bornés) pour le paramètre $g (\theta)$ et ayant le même **coefficient de confiance** $1 - \alpha$, ie :

(1) $$P_\theta^X (\{x \in \mathcal{X} : g (\theta) \in S (x)\}) = 1 - \alpha,$$

où $S (x)$ désigne soit $S' (x)$, soit $S'' (x)$.

A distance finie (ie lorsque $N < +\infty$), l'**efficacité relative** de $S' (X)$ pr à $S'' (X)$ est définie comme le rapport :

(2) $$e_N^2 (S' / S'') = \{b'' (X) - a'' (X)\}^2 / \{b' (X) - a' (X)\}^2$$

(ou parfois comme son inverse, à valeurs dans [0, 1]).

S'il existe un nombre $e_\infty^2 (S' / S'') \in \mathbf{R}_+^*$ tq la probabilité limite P-$\lim_{N \in \mathbf{N}} (S' / S'')$ soit égale à $e_\infty^2 (S' / S'')$ (cf **convergence en probabilité**), on dit que $e_\infty^2 (S' / S'')$ est l'**efficacité (relative) asymptotique (au sens de E.L. LEHMANN)** de $S' (X)$ pr à $S'' (X)$.

Si $e_\infty^2 (S' / S'') > 1$, on dit que $S' (X)$ est asymptotiquement plus efficace que $S'' (X)$.

(ii) Les définitions précédentes peuvent, sous certaines **conditions de régularité**, s'étendre à des régions de confiance.

(iii) Ainsi, $\mathcal{X}$ étant un **espace topologique** muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B}$, on définit $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ comme **famille de lois dominée** par une **mesure positive** (σ-finie) μ. Soit $1 - \alpha$ un coefficient de confiance donné.

L'**efficacité relative d'une région de confiance** S' (X) pr à une région de confiance S'' (X) est définie par le rapport (ou son inverse), s'il a un sens :

(3) $e_N (S' / S'') = \mu (S' (X)) / \mu (S'' (X))$.

L'**efficacité relative asymptotique** est alors définie comme la limite (en probabilité) du rapport précédent.