EFFICACITÉ RELATIVE ASYMPTOTIQUE ENTRE TESTS (G4, G11, H5)
(03 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) un **modèle d'échantillonnage** à distance finie, ie ($\mathcal{X}_0^N$, $\mathcal{B}_0^{\otimes N}$, $((P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta})^{\otimes N}$), considéré comme plongé dans le **modèle asymptotique** ($\mathcal{X}_0^{\mathbf{N}}$, $\mathcal{B}_0^{\otimes \mathbf{N}}$, $((P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta})^{\otimes \mathbf{N}}$) (cf **plongement**).

Pour tester une **hypothèse de base** $H_0 : \theta \in \Theta_0$ (avec $\Theta_0 \neq \varnothing$) contre une **hypothèse alternative** $H_1 : \theta \in \Theta_1$ (avec $\Theta_1 \neq \varnothing$ et $\Theta_1 \cap \Theta_0 = \varnothing$), on considère deux **fonctions de test** φ_N' et φ_N'', resp fondés sur des **statistiques** $t_N' : \mathcal{X}_0^{N'} \mapsto \mathcal{Y}$ et $t_N'' : \mathcal{X}_0^{N''} \mapsto \mathcal{Y}$, où $\mathcal{Y}$ est un espace auxiliaire. Ces statistiques sont ainsi supposées fondées resp sur un N'-**échantillon** X' et sur un N''-échantillon X''. Elles définissent les **statistiques de test** suivantes :

$$(1) \qquad \begin{aligned} T_N' &= t_N'(X'), \\ T_N'' &= t_N''(X''). \end{aligned}$$

Soit α un seuil donné, et soit :

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\theta \in \Theta_1 \mapsto \eta_{N'}'(a, \theta), \\ &\theta \in \Theta_1 \mapsto \eta_{N''}''(a, \theta), \end{aligned}$$

les fonctions puissances resp associées à chaque test (cf **puissance d'un test**).

(ii) On appelle **efficacité relative (au sens de J.L. HODGES - E.L. LEHMANN)** de $\varphi_{N'}'$ pr à $\varphi_{N''}''$ le nombre $e(\varphi_{N'}' / \varphi_{N''}'') \in \mathbf{R}_+$ (s'il existe) tq :

(a) les fonctions puissances $\eta_{N'}'$ et $\eta_{N''}''$ sont constantes ;

(b) $e(\varphi_{N'}' / \varphi_{N''}'') = N' / N''$.

Autrement dit, à niveau α donné, si $e(\varphi_{N'}' / \varphi_{N''}'') < 1$, alors, pour obtenir une même puissance, le test $\varphi_{N'}'$ nécessite moins d'observations (donc est plus efficace) que le test $\varphi_{N''}''$ (et inversement) (cf aussi **efficacité**, **parcimonie**, **principe de parcimonie**).

(iii) On appelle **efficacité relative asymptotique (au sens de E.J.G. PITMAN)** de $\varphi_{N'}'$ pr à $\varphi_{N''}''$ la limite suivante (si elle existe) :

$$(3) \qquad e_\infty(\varphi_{N'}' / \varphi_{N''}'') = \lim_{\min(N',N'') \to +\infty} e(\varphi_{N'}' / \varphi_{N''}'').$$

Ainsi, lorsque $\Theta = \mathbf{R}$, pour tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$ (avec $\theta_1 \neq \theta_0$ (resp $\theta_1 < \theta_0$, resp $\theta_1 > \theta_0$)), on considère deux **estimateurs** T_N' et T_N'' de θ resp associés au tests $\varphi_{N'}'$ et $\varphi_{N''}''$ et fondés ici sur le même N-échantillon X (avec $\mathcal{Y} = \mathbf{R}$). Si l'on peut écrire :

(4)
$$T_N' - \theta_0 = a' N' - b', \qquad \text{avec } a' > 0 \text{ et } b' > 0,$$
$$T_N'' - \theta_0 = a'' N'' - b'', \qquad \text{avec } a'' > 0 \text{ et } b'' > 0,$$

l'efficacité relative asymptotique de $\varphi_{N'}'$ pr à $\varphi_{N''}''$ est alors définie selon :

(5) $$e_\infty (\varphi_{N'}' / \varphi_{N''}'') = \lim_N e (\varphi_{N'}' / \varphi_{N''}'') = \lim_N (a' N' - b') / (a'' N'' - b'') \in \mathbf{R}_+^*.$$

Ici, N'' = N', et l'on peut même supposer dans (4) que les premiers membres sont seulement des infiniments petits équivalents aux seconds membres. On montre, en effet, que les puissances associées aux deux tests φ_N' et $\varphi_{N''}''$ satisfont aux hypothèses (a) et (b) de la définition.

(iv) L'efficacité relative asymptotique de deux suites de tests $\varphi' = (\varphi_{N'}')_{N' \in \mathbf{N}^*}$ et $\varphi'' = (\varphi_{N''}'')_{N'' \in \mathbf{N}^*}$ peut aussi être définie à partir de celle des **régions de confiance** resp associées à ces suites. A une région plus précise correspond, à distance finie, un test plus efficace (cf aussi **région de confiance la plus précise**).

En passant à la limite, à une région asymptotique plus précise correspond une suite de tests asymptotiquement plus efficace.

(v) Les notions précédentes s'étendent à des modèles d'échantillonnage sous forme non paramétrée, ainsi qu'à des suites de modèles d'échantillonnage.