EFFICACITÉ RELATIVE ENTRE ESTIMATEURS (G4, H5)
(16 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion d'**efficacité relative entre estimateurs** permet de comparer une propriété (qualité) donnée entre des **estimateurs**. Le concept de qualité généralement retenu est celui de **dispersion**.

(i) Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ un **modèle statistique** paramétré et $g : \Theta \mapsto \mathbf{R}$ une fonction mesurable (cf **application mesurable**). On suppose que :

(a) $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ est un espace puissance (**modèle d'échantillonnage**) de la forme $(\mathscr{X}_0^N, \mathscr{B}_0^{\otimes N})$;

(b) l'**échantillon** $X : \Omega \mapsto \mathscr{X}$ est défini par la **variable parente** $\xi : \Omega \mapsto \mathscr{X}_0$, dont la **loi** est $P_{\theta,0}^\xi$, ie $P_\theta^X = (P_{\theta,0}^\xi)^{\otimes N}$;

(c) $\forall N \in \mathbf{N}^*$, $s_N : \mathscr{X} \mapsto \mathbf{R}$ et $t_N : \Omega \mapsto \mathscr{X}$ sont deux fonctions mesurables définissant resp les estimateurs (ponctuels) $S_N = s_N(X)$ et $T_N = t_N(X)$ de $g(\theta)$. On suppose que S_N et T_N sont des **estimateurs sans biais** (au sens de l'espérance) ou encore des **estimateurs convergents** en probabilité, et que leurs **variances** sont tq (à N fixé) :

(1) $\quad V_\theta T_N \le V_\theta S_N, \qquad \forall \theta \in \Theta.$

On appelle alors **efficacité relative (au sens de R.A. FISHER)** de T_N pr à S_N le rapport :

(2) $\quad e_N(T / S) = V_\theta T_N / V_\theta S_N, \qquad \forall \theta \in \Theta,$

(ou, parfois, le rapport inverse). Le rapport (2) vérifie $e_N(T / S) \in [0, 1]$.

Lorsque T_N est un **estimateur efficace** de $g(\theta)$, (1) est vérifiée : dans ce cas, le rapport défini en (2) est parfois appelé **efficacité absolue** d'un **estimateur sans biais** S_N de $g(\theta)$.

Si l'inégalité (1) n'a lieu que sur un voisinage $\mathscr{V}_{\theta^*}$ de la **vraie valeur** θ^* du **paramètre**, on parle d'**efficacité (relative) locale** de T_N pr à S_N.

(ii) Dans le cas vectoriel, g, S_N et T_N sont à valeurs dans $\mathbf{R}^K$.

On appelle alors **efficacité relative** de T_N pr à S_N la **matrice** négative (au sens des **formes quadratiques** associées) :

(3) $\quad E_N(T_N / S_N) = V_\theta T_N - V_\theta S_N \le 0 \qquad$ (cf **matrice définie positive**),

les deux estimateurs S_N et T_N étant supposés tq :

(4) $V_\theta T_N \leq V_\theta S_N$ (au sens des formes quadratiques associées).

Comme (4) est vérifiée lorsque T_N est un estimateur efficace de g (θ), la matrice définie en (3) est parfois appelée **efficacité absolue** de l'estimateur (sans biais) S_N de g (θ).

Si R_N et S_N sont deux estimateurs sans biais (au sens de l'**espérance**) du paramètre g(θ), on appelle **efficacité relative** de S_N pr à R_N la matrice $E_N (S_N / R_N) = V_\theta R_N - V_\theta S_N$.

Si $V_\theta S_N$ est régulière (ie si l'estimateur S_N n'est pas dégénéré), on peut aussi définir l'**efficacité relative** selon la matrice :

(5) $E_N' (R / S) = (V_\theta R_N)(V_\theta S_N)^{-1}$,

ou encore selon le **rapport des variances** généralisées :

(6) $E_N'' (R / S) = \text{Dét} (V_\theta R_N) / \text{Dét} (V_\theta R_N)$.

(iii) Si le modèle d'échantillonnage (à distance N finie) précédent est plongé dans un modèle d'échantillonnage asymptotique, on peut, par passage à la limite, définir les notions correspondantes d'**efficacité asymptotique** : **efficacité (absolue) asymptotique** ou **efficacité (relative) asymptotique**.

(v) La situation dans laquelle le modèle se présente sous forme non (explicitement) paramétrée se traite de façon analogue.