ÉGALITÉ DE PARSEVAL (A4, A9)
(27 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit (E, (. | .)) un **espace de HILBERT** muni du **produit scalaire** (. | .) et $e = (e_i)_{i \in I}$ (I au plus dénombrable) une suite orthonormale d'éléments de E (cf **famille orthogonale de vecteurs**).

Pour que e soit une **partie totale** dans E il faut et il suffit que l'**inégalité de BESSEL** soit saturée, ie que l'on ait l'**égalité de M.A. PARSEVAL** :

(1) $\quad \Sigma_{i \in I} \ |(x \mid e_i)|^2 = ||x||^2, \qquad \forall x \in E.$

On appelle **identités de M.A. PARSEVAL** les égalités suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma_{i \in I} \ |(x \mid e_i)|^2 = ||x||^2, & \forall x \in E, \\ \Sigma_{i \in I} \ (x \mid e_i)\,(y \mid e_i)^{conj} = (x \mid y), & \forall (x, y) \in E^2, \end{cases}$$

où z^{conj} désigne, par commodité, le nombre complexe conjugué de z (ie $z^{conj} = \overline{z}$).

Le coefficient $(x \mid e_i)$ est appelé i-ième **coefficient** de x, ou i-ième **coordonnée** de x, pr au système e.

(ii) A titre d'exemple, si $E = \mathcal{C}_c(I)$ est l'**espace vectoriel** des fonctions complexes continues sur I = [-1, +1] , muni du **produit scalaire** :

(3) $\quad (f, g) \in E^2 \mapsto (f \mid g) = \int_I f(t)\, g(t)\, dt,$

alors le système orthonormal $f = (f_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ défini par :

(4) $\quad \varphi_n(t) = 2^{-1/2} . e^{\pi n i t}, \qquad \forall n \in \mathbf{Z}, \quad \forall t \in I,$

est appelé **système trigonométrique** dans E. Les coefficients $(f \mid \varphi_n)$ correspondants sont appelés **coefficients de J.B.J. FOURIER** de f (cf aussi **transformée de FOURIER**).