ÉLÉMENT EXTRÉMAL (A2, A11, G4)
(14 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit (E, $\leq$) un **ensemble** ordonné par la relation $\leq$ (cf **relation d'ordre**).

Un élément b $\in$ E est appelé **élément maximal** de E ssi aucun autre élément x $\in$ E ne peut en être un **majorant** (au sens strict), ie, en désignant par $\geq$ l'**ordre inverse** de $\leq$, ssi :

(1) $x \in E \text{ et } x \geq b \Rightarrow x = b.$

On définit de façon analogue un **élément minimal** a de E :

(2) $x \in E \text{ et } x \leq a \Rightarrow x = a.$

On appelle **élément extrémal** de E un élément qui est soit maximal, soit minimal.

(ii) La notion d'**extrémalité** s'applique, en particulier, aux **parties** de E elles-mêmes. Si A est une telle partie, et si c $\in$ A, on dit que c est un maximal (resp minimal) dans A ssi le seul élément x $\in$ A tq c $\leq$ x (resp x $\leq$ c) est c lui-même :

$$(3) \quad \begin{array}{l} x \in A \text{ et } c \leq x \Rightarrow x = c \\ (\text{resp } x \in A \text{ et } x \leq c \Rightarrow x = c). \end{array}$$

(iii) En **Statistique**, la notion n'est réellement utile que pour des ensembles E (ou des parties de E) qui sont partiellement (et non totalement) ordonné(e)s, tq les **espaces fonctionnels** : eg ensemble des **fonctions de test**, des **fonctions de risque**, etc.

L'expression « élément extrémal » est notamment utilisée :

(a) en **théorie de la décision** (cf **décision statistique**), lorsqu'il s'agit de classer des **critères** (cf **classement**, **classification**) ou de comparer des fonctions de risque (cf **optimalité**) ;

(b) en relation avec les **statistiques d'ordre** : cf eg **classe extrême**, **classes inférieure, supérieure**, **inégalité des déviations extrêmes**, **rapport des extrêmes**, **statistique des extrêmes**, **valeur extrême**.