ENTROPIE D'UN RECOUVREMENT (C5, F3, G6)
(14 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La notion classique d'entropie peut s'adapter à divers **contextes** : elle conduit ainsi à la notion d'**entropie d'un recouvrement** (ensembliste) ou encore à celle d'**entropie d'une partition** (ensembliste).

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $\varphi : \Omega \mapsto \Omega$ une **application** laissant P invariante (ie tq $P^{\varphi} = \varphi(P) = P$) (cf **invariance**) et $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_H\}$ un **recouvrement (mesurable) fini** de Ω (ie une **suite** de parties $A_h \in \mathcal{T}$ tq $A_h \neq \emptyset$, $\forall h \in N_H^*$, et $U_h A_h = \Omega$). Les A_h sont parfois appelés les **atomes** de la sous-**tribu** $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{T}$ engendrée par les **réunions** finies des A_h . On définit enfin une fonction $u : [0, 1] \mapsto$ **R** selon :

$$(1) \qquad u(x) = \begin{cases} -x \,.\, \mathrm{Log}\, x, & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle alors :

(a) **entropie du recouvrement** $\mathcal{A}$ le nombre :

$$(2) \qquad H(\mathcal{A}) = \Sigma_{A \in \mathcal{U}(\mathcal{A})} u(P(A)) = -\Sigma_{A \in \mathcal{U}(\mathcal{A})} P(A) \,.\, \mathrm{Log}\, P(A) \,;$$

(b) **entropie de la sous-tribu** $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ relativement à φ le nombre :

$$(3) \qquad H_{\varphi}(\mathcal{U}(\mathcal{A})) = \lim_n (1 / n) \,.\, H(\mathcal{V}_{\varphi}(\mathcal{A})),$$

où $\mathcal{V}_{\varphi}$ (A) est la sous-tribu de $\mathcal{T}$ engendrée par $\cup_{i=0}^{n-1} \varphi^{-i} (\mathcal{U}(\mathcal{A}))$;

(c) **entropie de l'application** φ le nombre :

$$(4) \qquad H(\varphi) = \sup_A H_{\varphi}(\mathcal{U}(\mathcal{A})),$$

où A parcourt l'ensemble des sous-**algèbres** finies de $\mathcal{T}$.