ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE (A3)
(28 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Notion intervenant dans de nombreuses questions d'algèbre (eg diagonalisation d'un **opérateur**) et de **Statistique** (eg en **analyse des données** : **décomposition spectrale d'une matrice** de covariance).

(i) Soit E un **ev** de dimension finie n sur un corps commutatif **K** (eg **K** = **R** ou **C**) et f $\in$ End (E) une **application linéaire** dont la **matrice** dans une **base** donnée de E est A $\in M_n$ (**K**).

On appelle **équation caractéristique** de A (ou de f) l'équation suivante :

(1) $D_n(\lambda) = \text{Dét}(A - \lambda I_n) = 0,$

dans laquelle Dét $(A - \lambda I_n)$ est un polynôme de degré n pr à $\lambda \in$ **K**, appelé **polynôme caractéristique**.

On appelle **valeur propre**, ou parfois **racine caractéristique**, de A (ou de f) toute solution $\lambda \in$ **K** vérifiant (1).

(ii) On montre que :

(a) si A et B sont deux **matrices semblables**, elles ont même équation caractéristique ;

(b) toute matrice A (resp tout endomorphisme f) vérifie sa propre équation caractéristique (**théorème de A. CAYLEY - W.R. HAMILTON**) :

(2)
$$D_n(A) = O \in M_n(\mathbf{K})$$
$$\text{resp } D_n(f) = 0 \in \text{End}(E),$$

en associant I_n (resp id_E) au coefficient constant du polynôme formel D_n ;

(c) le polynôme caractéristique (1) se développe selon :

(3) $\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + ... + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0,$ avec $\alpha_1 = \text{tr } A$;

(d) s'il existe une **matrice régulière** $P \in R_n$ (**K**) tq $P^{-1} A P = \Delta$ est une **matrice diagonale** (ie $\Delta \in D_n$ (**K**)), on dit que A est une **matrice diagonalisable**. Les termes diagonaux de Δ sont alors les solutions de l'équation (1).

(iii) A titre d'exemple, soit :

(4) $u_n = a_1 u_{n-1} + ... + a_p u_{n-p}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$

une **équation de récurrence linéaire** d'ordre p sur **K** = **R**, soumise aux p conditions initiales $u_0 = u_0^*$, $u_1 = u_1^*$,..., $u_{p-1} = u_{p-1}^*$ (où $p \in \mathbf{N}^*$ ainsi que les u_0^*, u_1^*,..., u_{p-1}^* sont donnés). En posant :

$$(5)\qquad \begin{array}{l} u_n^1 = u_n , \\ u_n^2 = u_{n-1}^1 , \\ \ldots \\ \ldots \\ u_n^p = u_{n-1}^{p-1} , \end{array}$$

on peut réécrire (1) sous la forme d'un système d'équations :

$$(6)\qquad \begin{array}{l} u_n^1 = a_1\, u_{n-1}^1 + \ldots + a_p\, u_{n-1}^p , \\ u_n^2 = u_{n-1}^1 , \\ \ldots \\ \ldots \\ u_n^p = u_{n-1}^{p-1} , \end{array}$$

ie, en posant $U_n = (u_n^1 ,\ldots, u_n^p)'$ et en définissant la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sous la forme du système :

(7) $\quad U_n = A\, U_{n-1} ,\qquad$ avec $U_0 = U_0^* = (u_0^* , u_1^* ,\ldots, u_{p-1}^*)'$.

La solution générale de ce système est de la forme :

(8) $\quad U_n = A^n\, U_0 ,\qquad \forall\, n \in \mathbf{N}$,

et le calcul de A^n peut s'effectuer par diagonalisation de A :

(9) $\quad P^{-1}\, A\, P = \Delta \in D_n(\mathbf{R})$,

avec $P \in R_p(\mathbf{R})$.

Finalement :

(10) $\quad U_n = P\, \Delta^n\, P^{-1}\, U_0 ,\quad \forall\, n \in \mathbf{N}$.