ÉQUATION DE BESSEL (A7, C)
(10 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On appelle **équation de F.F.W. BESSEL** l'**équation différentielle** suivante :

(1) $x^2 . f''(x) + x . f'(x) + (a^2 . x^2 - b^2) . f(x) = 0$,

dans laquelle $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ est une **fonction numérique** différentiable donnée, f ' et f '' sont ses deux premières **dérivées** (cf **différentiabilité**).

(ii) Les solutions, appelées **fonctions de F.F.W. BESSEL**, sont de la forme :

(2) $f(x) = a . J_\beta (a . x) + b . N_\beta (a . x)$,

dans laquelle :

(a) J_β est appelée **fonction de BESSEL de première espèce** d'ordre β :

(3) $J_\beta (u) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} (-1)^n \{(u / 2)^{\beta + 2n}\} / \{n ! \Gamma(\beta + n + 1)\}$,

où Γ représente la **fonction Gamma** ;

(b) N_β est appelée **fonction de BESSEL de seconde espèce**, ou **fonction de K.K. NEUMANN**, d'ordre β :

(4) $N_\beta (u) = (\cos b \pi) \{J_\beta (u) - J_{-\beta} (u)\} / \sin b \pi$.

(iii) L'équation (1) est à l'origine des **fonctions de BESSEL** souvent utilisées eg en **calcul des probabilités**.