ÉQUATION DE POINCARÉ (B4, B5)

(i) Soit $(A_i)_{i \in I}$ (avec $I = \{1 ,..., n\} = N_n^*$) une **suite** (finie) de **parties d'un ensemble** donné E.

On appelle **équation de R. POINCARÉ**, ou **principe d'exclusion et d'inclusion**, l'égalité suivante (démonstration par récurrence) :

(1) $\quad \text{Card}\ (\cup_{i \in I} A_i) = S_1 - S_2 + S_3 + ... + (-1)^{n+1} S_n = \Sigma_{i \in I} (-1)^{i+1} . S_i$,

dans laquelle :

$S_1 = \Sigma_{i \in I} \text{Card}\ A_i$,

$S_2 = \Sigma_{(i,j) \in I(2)} \text{Card}\ (A_i \cap A_j)$,

(2) $\quad S_3 = \Sigma_{(i,j,k) \in I(3)} \text{Card}\ (A_i \cap A_j \cap A_k)$,

... ...

$S_n = \text{Card} \cap_{i \in I} A_i$.

où l'on note $I(m) = I^m_{\leq} = \{(i_1 ,..., i_m) \in I^m : i_1 \leq ... \leq i_m\}$, avec m = 1 ,..., n.

(ii) En divisant les deux membres de (1) par le premier, on obtient le **théorème de POINCARÉ**, classique en **calcul des probabilités**.