ÉQUATION DE RÉCURRENCE (A16)
(29 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une équation de récurrence est une **équation fonctionnelle** particulière intervenant notamment :

(a) en **calcul des probabilités** : certaines **lois de probabilité** se définissent par récurrence ;

(b) en **théorie des processus** : **autocorrélation**, **modèles dynamiques**, **processus ar**, **processus armm**, etc ;

(c) en **théorie séquentielle**, dans certains problèmes de **décision adaptative** (mises à jour, etc).

(i) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** sur $\mathbf{R}^m$, $\mathcal{S} = (\mathbf{R}^m)^{\mathbf{N}}$ l'espace de telles suites, et $f : (\mathbf{R}^m)^p \mapsto \mathbf{R}^m$ et $g : (\mathbf{R}^{1+p}) \mapsto \mathbf{R}^m$ sont deux **applications** données.

On appelle **équation de récurrence** d'ordre p :

(a) soit l'équation suivante (**forme explicite**) :

(1) $\quad u_n = f(u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}),$

(b) soit l'équation suivante (**forme implicite**) :

(2) $\quad g(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}) = 0,$

auxquelles on adjoint la donnée supplémentaire des p premières valeurs $u_0 = u_0^*$, $u_1 = u_1^*, \ldots, u_{p-1} = u_{p-1}^*$ (où $u_0^*, u_1^*, \ldots, u_{p-1}^*$ sont p valeurs données), nécessaires pour « amorcer » la récurrence définie par (1) ou (2).

Ces valeurs initiales de la suite u sont appelées **valeurs d'amorçage**, **conditions initiales** ou encore « **valeurs de départ** ».

(ii) Le problème principal consiste à déterminer une suite $u^{\sim} = (u_n^{\sim})_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{S}$ qui vérifie (1), ou (2), tout en respectant les conditions initiales.

Le système d'ordre p de la forme (1) peut toujours se ramener à un système de p équations d'ordre 1 en changeant d'inconnue $u \mapsto U$, où la suite (sur un espace de suites produit) $U = (U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est définie par :

(3) $\quad U_n = \{u^1_n, \ldots, u^p_n\},$

avec $u^1_n = u_n$, $u^2_n = u^1_{n-1}, \ldots, u^p_n = u^{p-1}_{n-1}$.

Par suite, (1) s'écrit sous la forme :

$$(4)\quad \begin{cases} u^1_n = f(u^1_{n-1}, \dots, u^p_{n-1}) \\ u^2_n = u^1_{n-1} \\ \dots \\ \dots \\ u^p_n = u^{p-1}_{n-1}, \end{cases}$$

ie sous la forme d'une **équation de récurrence vectorielle** :

$$(4)\quad \begin{cases} U_n = F(U_{n-1}) = \{f(U_{n-1}), u^1_{n-1}, \dots, u^{p-1}_{n-1}\}, \\ U_0 = U_0^* = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{p-1}^*) \text{ (condition initiale).} \end{cases}$$

(iii) Un exemple important est l'**équation de récurrence linéaire** (ou **équation de récurrence affine**) :

$$(5)\quad u_n = A_1(n)\, u_{n-1} + \dots + A_p(n)\, u_{n-p} + B(n),$$

dans laquelle $A_j(n) \in M_m(\mathbf{R})$, $\forall j \in N_p^*$, et $B(n) \in \mathbf{R}^m$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Lorsque B est nulle, (5) définit une **équation homogène**.

La forme (4) permet d'écrire, par itération, $U_n = F^n(U_0)$, relation qui vérifie l'**équation fonctionnelle** :

$$(6)\quad F^{a+b}(U_0) = F^a(F^b(U_0)), \qquad \forall (a, b) \in \mathbf{N}^2, \qquad \forall U_0 \in \mathbf{R}^m.$$

La forme de F permet souvent d'utiliser le **théorème du point fixe** pour étudier la limite de la suite U, donc celle de la suite u avec laquelle elle est en bijection par {(3),(4)}.

On peut associer à l'équation précédente un **problème d'interpolation** consistant à déterminer, si elle existe, une fonction $G : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^m$ tq :

$$(7)\quad \begin{cases} G(n, U_0) = F^n(U_0), & \forall n \in \mathbf{N}, \forall U_0 \in \mathbf{R}^m, \\ G(s+t, U_0) = G(t, G(s, U_0)), & \forall (s, t) \in \mathbf{R}_+^2. \end{cases}$$

Ce problème peut être résolu si le problème auxiliaire suivant l'est. Etant donné la fonction $\varphi : \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^m$, trouver $\mu \in \mathbf{R}^m$ et $\psi : \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^m$ tq l'**équation de N.H. ABEL - E. SCHRÖDER** suivante :

$$(8)\quad \psi(\varphi(U_0)) = \mu \cdot \psi(U_0)$$

soit vérifiée.

Si ψ existe vérifiant (8), on montre que :

$$(9)\quad \psi(\varphi^n(U_0)) = \mu^n \cdot \psi(U_0),$$

d'où (si ψ est inversible) :

(10) $\varphi^n (U_0) = \psi^{-1} \{\mu^n . \psi (U_0)\}$.

Par suite, la fonction G définie par :

(11) $G (t, U_0) = \psi^{-1} (\mu^t . \psi (U_0)), \qquad \forall t \in \mathbf{R}_+$,

vérifie (7), donc est solution du problème d'interpolation.

(iv) Dans la définition d'une équation de récurrence (explicite ou implicite), on peut remplacer $\mathbf{R}^m$ par un **espace normé** E sur **R**.

L'**opérateur retard** $u_n \mapsto L\, u_n = u_{n-1}$ est souvent utilisé dans ce contexte, car il permet, selon le cas, une écriture formelle du type :

(12) $id = f (L ,..., L^p)$,

ou du type :

(13) $g (id, L ,..., L^p) = 0$.

(v) On appelle **équation aux différences (finies)** d'ordre p l'équation suivante (sous forme implicite) (cf **différence finie**) :

(14) $h (\Delta u_n , \Delta^2 u_n ,..., \Delta^p u_n) = 0$.

Par suite :

(a) on peut passer d'une équation de récurrence à une équation aux différences à l'aide des relations $\Delta^j = (id - L)^j$, $\forall j \in N_p$, par inversion selon :

(15) $v_n = \Delta^j u_n = (id - L)^j \Leftrightarrow u_n = (id - L)^{-j} v_n$;

(b) inversement, on peut passer d'une équation aux différences à une équation de récurrence par ces mêmes relations.

Si, dans la définition d'une équation aux différences, on remplace les différences D^j par des différences Δ_h^j d'**incrément** $h > 0$, rien n'est changé car une équation de la forme :

(16) $\Phi (v_{a+nh} ,..., v_{a+(n-p)h}) = 0$

se met sous la forme (1) ou (2) en posant :

(17) $u_{n-j} = v_{a+(n-j)h} , \qquad \forall j \in N_p$.

En effet, si $u^{\sim} = (u_n^{\sim})_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{S}$ est solution de (1), alors la solution de (16) est $v_{a+nh}^{\sim} = u_{a+nh}^{\sim}$, $\forall$ n $\in$ **N**.

(vi) Il existe des équations de récurrence ou des équations aux différences un peu plus générales que (1) (ou (2)) et (16) et tq f (ou g) et Φ dépendent aussi de n $\in$ **N**, ie :

(18) $u_n = f(n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p})$ ou $f_n(u_{n-1}, \ldots, u_{n-p})$

et :

(19) $g(n, u_n, \ldots, u_{n-p})$ ou $g_n(u_n, \ldots, u_{n-p}) = 0$.

(vii) Enfin, on peut aussi définir ces équations à l'aide de l'**opérateur avance** $u_n \mapsto F u_n = u_{n+1}$ au lieu de l'opérateur retard L précédent.

Le formalisme adopté, ainsi que nombre de méthodes utilisées pour étudier une équation de récurrence ou une équation aux différences, sont analogues à ceux utilisés pour l'étude d'une **équation différentielle**.