ÉQUATION DE RENOUVELLEMENT (N2)

Une équation de renouvellement est une **équation intégrale** de VOLTERRA (de seconde espèce), utilisée dans l'étude des **processus de renouvellement**, et dont la forme est la suivante (eg à **espace d'état** continu et en **temps** continu) :

(1) $y(t) + \int_0^t k(u)\, x(t-u)\, du = x(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+$,

où les fonctions k et y sont données.

Une forme équivalente s'écrit :

(2) $y(t) + \int_0^t k(t-u)\, x(u)\, du = x(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+$.

(i) Si $X = (X_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est un **processus** indépendant et équidistribué (**processus iid**) à valeurs dans $\mathscr{X} = \mathbf{R}_+$ et en temps continu $T = \mathbf{R}_+$, et si la **densité** f et la **fonction de répartition** F, communes aux **variables aléatoires** X_t , sont connues, on peut étudier la **moyenne** (ou **espérance**) $\mu : t \mapsto E\, X_t$ de X si celle-ci vérifie l'équation :

(3) $F(t) + \int_0^t \mu(t-u)\, f(u)\, du = \mu(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+$,

où $\mu(t) = E\, X_t$.

(ii) Si une équation de renouvellement (eg à K dimensions) peut se mettre sous la forme :

(4) $y + \mu * x = x$ ou $x - \mu * x = y$

(dans laquelle $*$ désigne le **produit de convolution** et μ représente ici la **mesure de renouvellement**), sa solution peut, sous certaines conditions, s'écrire sous la forme :

(5) $x(t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mu^{*n} * y(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}^K$,

où μ^{*n} désigne la **puissance de convolution** d'ordre n de μ.

(iii) La **théorie du renouvellement** étudie notamment les propriétés de x lorsque $||t|| \to +\infty$. Ainsi, en notant $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un processus iid constitué de va entières ($\mathscr{X} = \mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$) et en temps discret ($T = \mathbf{N}$), on peut étudier l'**événement** A_N défini par le fait que l'une des sommes (au moins) $\sum_{n=0}^N X_n = N$. On peut donc calculer le nombre :

(6) $p(N) = P(A_N)$,

ainsi que la limite : $\lim_{N \to +\infty} p(N)$.