ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (A7)
(15 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit E un **espace de BANACH** réel, U un ouvert de **R** x E et f : U $\mapsto$ E une **application continue**.

(a) on appelle **équation différentielle du premier ordre**, ou **équation différentielle d'ordre 1**, (dans le champ réel) l'équation :

(1) $x' = f(t, x)$, où $x' = dx / dt = D x$ (cf **dérivée**) ;

(b) en notant $\mathcal{I}$ la **famille** des intervalles ouverts I de **R** et $C^1(\mathcal{I}, E)$ l'espace des fonctions de classe C^1 de $\mathcal{I}$ dans E, on appelle **solution de l'équation** (1) tout couple (φ, I) tq :

$(a)_1$ $I \in \mathcal{I}$ et $I \neq \varnothing$;

$(a)_2$ $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}, E)$;

$(a)_3$ $(t, \varphi(t)) \in U, \forall t \in I$;

$(a)_4$ $(d\varphi / dt)(t) = f(t, \varphi(t)), \forall t \in I$.

(c) on appelle **système différentiel** une équation tq (1) où $E = \prod_{i=1}^n E_i$ est un produit d'espaces de BANACH (eg $E_i = \mathbf{R}, \forall i \in N_n^*$).

(d) on appelle **équation différentielle d'ordre p** (dans le champ réel) l'équation :

(2) $x^{(p)} = f(t, x, \ldots, x^{(p-1)})$, où $x^{(j)} = d^j x / dt^j, \forall j \in N_p^*$.

On peut se ramener à un système différentiel (1) (équation du premier ordre) en posant :

(3) $(d / dt) \{x, x', \ldots, x^{(p-1)}\} = \{x', x'', \ldots, f(t, x, \ldots, x^{(p-1)}\}$.

(ii) Soit $(t_0, x_0) \in U$.

On appelle **problème de A.L. CAUCHY** de **condition initiale** (t_0, x_0) le problème de résolution du système :

(4) $x' = f(t, x)$, avec $x_0 = f(t_0)$.

(iii) Un certain nombre de résultats (existence et unicité des solutions) se rapportent aux problèmes précédents.

En pratique, les résultats les plus utilisés concernent les **solutions approchées** des équations tq (4) et les théorèmes relatifs aux équations différentielles linéaires.

Une **équation différentielle linéaire**, ou **équation différentielle affine**, ou encore **équation différentielle avec second membre**, (du premier ordre) est une équation de la forme (1) tq :

(5) $f(t, x) = A(t) . x + b(t)$,

où $A : I \mapsto \mathscr{L}(E)$ est une application continue de $I \in \mathscr{T}$ dans l'ensemble des **endomorphismes** continus de E, et $b : I \mapsto E$ est une application continue.

On appelle **équation différentielle linéaire sans second membre** (du premier ordre) l'équation (5) dans laquelle $b = 0$.

(iii) On peut étendre la plupart des résultats de la théorie au champ complexe : E est alors un espace de BANACH sur **C** et U un ouvert de **C** x E.