ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE TOTALE (A7)
(15 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit E et F deux **espaces de BANACH** sur **K** = **R** (ou **K** = **C**), A un ouvert de E, B un ouvert de F et Φ : A x B $\mapsto$ $\mathscr{L}$ (E, F) (espace de BANACH des **applications linéaires** continues de E dans F) (cf **application continue**).

On appelle :

(a) **équation différentielle totale** (d'ordre 1) l'équation :

(1) $y' = \Phi(x, y)$;

(b) **solution** de l'équation (1) une application différentiable φ : A $\mapsto$ B (cf **différentiabilité**) tq :

(2) $\varphi'(x) = \Phi(x, \varphi(x)), \qquad \forall x \in A.$

(ii) On dit que (1) est une **équation complètement intégrable** dans A x B ssi, $\forall$ (a, b) $\in$ A x B, il existe un **voisinage** $\mathscr{V}_a$ de a, ouvert dans A, et tq il existe une solution unique $\varphi : \mathscr{V}_a \mapsto B$ de (1) vérifiant :

(3) $\varphi(a) = b.$

(iii) Le **théorème de G.F. FROBENIUS** donne une **condition d'intégrabilité complète**. En effet, si Φ est de **classe** C^1 dans A x B lorsque **K** = **R** (resp de classe C^2 dans A x B lorsque **K** = **C**), alors (1) est complètement intégrable ssi, $\forall$ (x, y) $\in$ A x B, on a :

(4)
$$D_1 \Phi(x, y).(h_1, h_2) + D_2 \Phi(x, y).\{\Phi(x, y).h_1, h_2\} = D_1 \Phi(x, y).(h_2, h_1) + D_2 \Phi(x, y).\{\Phi(x, y).h_2, h_1\},$$

pour tout $(h_1, h_2) \in E^2$, où D_i désigne la dérivation pr à l'argument n° i de Φ (avec i = 1, 2).

En particulier, si E = $\mathbf{K}^n$, l'analogue de (4) pour le **système d'équations aux dérivées partielles** suivant :

(5) $D_i\, y = \Phi_i(x, y), \qquad \forall i \in N_n^*,$

avec $x \in \mathbf{K}^n$, s'écrit :

(6) $D_j \Phi_i(x, y) + D_{n+1} \Phi_i(x, y) . \Phi_j(x, y) = D_i \Phi_j(x, y) + D_{n+1} \Phi_j(x, y) . \Phi_i(x, y),$

pour tout $(i, j) \in (N_n^*)^2$.

Si $n > 1$, le système (5) n'admet en général aucune solution.

Si $E = \mathbf{K}$, on a $\mathscr{L}(E, F) \approx F$ (**isométrie** de $\mathscr{L}(E, F)$ et de F). Par suite, (1) se réduit à une **équation différentielle** ordinaire.