

ÉQUATION FONCTIONNELLE (A)

(15 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Une **équation fonctionnelle** est une équation dans laquelle l' « inconnue » est une **application** (ou une fonction) : **suite** sur un **ensemble**, **fonction numérique**, **fonction d'ensembles**, etc. Elle est à distinguer de la notion (probabiliste) de **relation fonctionnelle**.

(i) Soit E et F deux ensembles, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E, F)$ un ensemble d'applications de E vers F et $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ et $g \in \mathcal{A}$ deux applications.

On appelle **équation fonctionnelle** une équation en $f \in \mathcal{A}$ de la forme :

$$(1) \quad \phi(f) = g.$$

Autrement dit, (1) s'explique selon :

$$(1)' \quad (\phi \circ f)(x) = g(x), \quad \forall x \in E.$$

(ii) Si ϕ^{-1} (application inverse de ϕ , ou seulement sa **restriction** à une partie stricte de A, ou encore son **extension** à un ensemble plus vaste que A) existe, alors une solution $f^\#$ de (1), lorsqu'il en existe, vérifie :

$$(2) \quad f^\# = \phi^{-1}(g).$$

(iii) Une classification élémentaire des équations fonctionnelles est la suivante :

(a) équations aux **différences finies** et **équations de récurrence** ;

(b) **équations différentielles** (A.L. CAUCHY, G.F. FROBENIUS) ;

(c) **équations intégrales** (E.I. FREDHOLM, V. VOLTERRA) ;

(d) équations mixtes (intégré-différentielles).

(iii) En **Statistique**, ces équations résultent souvent de **problèmes d'optimisation**. E et F sont eg des **espace de HILBERT** (de fonctions ou de **variables aléatoires**).