ÉQUATION INTÉGRALE (A5, A7)
(18 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **équation intégrale** est une équation dans laquelle l' (ou les) « inconnue(s) » sont des fonctions.

(i) Soit (T, $\mathcal{B}_T$, μ) un **espace mesuré** :

(a) on appelle **noyau** sur (T, $\mathcal{B}_T$, μ) toute fonction mesurable (cf **application mesurable**) à valeurs complexes :

(1) $K : T^2 \mapsto \mathbf{C}$;

(b) on appelle **noyau de E.I. FREDHOLM**, ou **noyau de V. VOLTERRA**, un noyau T tq $T \in L_{\mathbf{C}}^2 (T^2, \mathcal{B}_T^{\otimes 2}, \mu \otimes \mu)$. Si $x \in L_{\mathbf{C}}^2 (T, \mathcal{B}_T , \mu)$, on définit un **endomorphisme** continu de l'**espace de HILBERT** $L_{\mathbf{C}}^2 (T, \mathcal{B}_T , \mu)$ appelé **opérateur de E.I. FREDHOLM**, encore noté K, selon :

(2) $K : x \mapsto y = K (x)$, avec $y (t) = \int_T K (t, u) x (u) d\mu (u), \quad \forall t \in T$.

(ii) On appelle **équation intégrale (linéaire) de E.I. FREDHOLM** une **équation fonctionnelle** (en x) de la forme :

(3) $K (x) - \lambda x = y$,

où $\lambda \in \mathbf{C}$, K et y sont donnés.

On distingue plusieurs espèces (ou formes) d'équations de FREDHOLM :

(a) l'**équation de première espèce** :

(4) $\int_T K (t, u) x (u) d\mu (u) = y (t), \quad \forall t \in T$;

(b) l'**équation de deuxième espèce** :

(5) $x (t) - \lambda . \int_T K (t, u) x (u) d\mu (u) = y (t), \quad \forall t \in T$;

(c) l'**équation de troisième espèce** :

(6) $a (t) x (t) - \lambda . \int_T K (t, u) x (u) d\mu (u) = y (t), \quad \forall t \in T$.

(iii) Lorsque $T = [a, b] \subset \mathbf{R}$ et $\mu = \lambda_1$ (**mesure de LEBESGUE**), on appelle **équation de V. VOLTERRA** :

(a) **de première espèce** l'équation :

(7) $\int_a^t K(t, u)\, x(u)\, du = y(t), \qquad \forall t \in T$;

(b) **de deuxième espèce** l'équation :

(8) $x(t) - \lambda . \int_a^t K(t,u)\, x(u)\, du = y(t), \qquad \forall t \in T$;

(c) **de troisième espèce** l'équation :

(9) $a(t)\, x(t) - \lambda . \int_a^t K(t, u)\, x(u)\, du = y(t), \qquad \forall t \in T.$

(iv) On définit aussi des **équations non linéaires** :

(a) celles de FREDHOLM s'obtiennent en remplaçant les intégrales des formules (4), (5) et (6) par l'intégrale :

(10) $\int_T K(t, u, x(u))\, d\mu(u),$

où $K : T^3 \mapsto$ **C** est encore appelé **noyau de l'équation intégrale** ;

(b) celles de VOLTERRA s'obtiennent en remplaçant les intégrales des formules (7), (8) et (9) par l'intégrale :

(11) $\int_a^t K(t, u, x(u))\, du,$

où $K : [a, b]^3 \mapsto$ **C** est aussi appelé **noyau de l'équation intégrale**.

(v) En pratique, les noyaux peuvent être de formes très variées, eg :

(a) le **noyau de J. LIOUVILLE - G.F.B. RIEMANN** :

(12) $$K(t, u) = \begin{cases} t^{-\alpha} (t - u)^{\alpha - 1} & \text{si } 0 \leq u \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t < u \leq 1, \end{cases}$$

dans lequel $T = [0, 1]$ et $\alpha > 1$;

(b) **noyau de G.H. HARDY** :

(13) $$K(t, u) = \begin{cases} u^{-\alpha}\ t^{\alpha - 1} & \text{si } 0 \leq u \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t < u \leq 1, \end{cases}$$

dans lequel $T = [0, 1]$ et $\alpha > 1$;

(c) **noyau de T. MERCER** (noyau dégénéré) :

(14) $K(t, u) = \int_T f(t, v)\, g(v, u)\, d\mu(v)$,

dans lequel T est quelconque ;

(d) **noyau de E.J.B. GOURSAT** (noyau dégénéré), où T est quelconque :

(15) $K(t, u) = \Sigma_{j=1}^{p} f_j(t)\, g_j(u)$,

dans lequel T est quelconque, $f_j : T \mapsto \mathbf{C}$ et $g_j : T \mapsto \mathbf{C}$, $\forall j \in N_p^*$.

(vi) La résolution des équations intégrales est fondée sur plusieurs résultats : théorie des opérateurs (alternative de E.I. FREDHOLM), **équations différentielles**, **approximations** par **différences finies** (« discrétisation » des équations) et algèbre linéaire.

A titre d'exemple, l'équation élémentaire pr à la **fonction numérique** y :

(16) $y = \alpha - \lambda . \int y\, dt$,

dans laquelle $\alpha \in \mathbf{R}$, peut être résolue par une méthode itérative. Ainsi :

(a) on choisit pour valeur initiale à la fonction $y^{(0)} = 0$, d'où $y^{(1)} = \alpha - \lambda . \int y^{(0)}\, dt = \alpha$;

(b) la valeur suivante se calcule selon $y^{(2)} = \alpha - \lambda . \int y^{(1)}\, dt$;

(c) l'équation n° j étant de la forme $y^{(j)} = \alpha - \lambda . \int y^{(j-1)}\, dt$, $\forall j > 2$.

(vii) En **calcul des probabilités** aussi bien qu'en **Statistique**, des transformations intégrales tq (2) sont très utilisées : **transformation de FOURIER**, **transformation de LAPLACE**, **transformation de MELLIN**, **théorie des processus** (cf **équation de renouvellement**).