

ÉQUATION INTÉGRALE STOCHASTIQUE (A5, N)

(10 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une équation intégrale stochastique est une **équation intégrale**, liée à la notion d'**intégrale stochastique**, qui fait intervenir des **variables aléatoires** sous forme de **processus**.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathbf{C}, \mathcal{B}_{\mathbf{C}}), (X_t)_{t \in T}\}$ et $Y = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathbf{C}, \mathcal{B}_{\mathbf{C}}), (Y_t)_{t \in T}\}$ deux **processus stochastiques** ayant même ensemble d'**états** \mathbf{C} . On suppose que $T = \mathbf{R}_+$ est muni d'une **tribu de parties** \mathcal{B}_T dotée d'une **mesure positive** μ .

On appelle alors :

(a) **noyau stochastique** sur (T, \mathcal{B}_T, μ) toute fonction mesurable (cf **application mesurable**) :

$$(1) \quad K : T^2 \mapsto \mathbf{C} ;$$

(b) **noyau stochastique de E.I. FREDHOLM**, ou **noyau stochastique de V. VOLTERRA**, un noyau stochastique $K \in L_{\mathbf{C}}^2(T^2 \times \Omega, \mathcal{B}_T^{\otimes 2} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \mu \otimes P)$;

(ii) Dans le cadre précédent, on suppose que les composantes X_t et Y_t de X et de Y appartiennent à l'**espace de HILBERT** $L_{\mathbf{C}}^2(T \times \Omega, \mathcal{B}_T \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes P)$.

On appelle **opérateur stochastique de E.I. FREDHOLM** l'**endomorphisme** (encore noté K) :

$$(2) \quad K : X \mapsto Y = K(X),$$

défini dans $L_{\mathbf{C}}^2(T \times \Omega, \mathcal{B}_T \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes P)$ à l'aide de l'**intégrale stochastique** :

$$(3) \quad Y_t(\omega) = \int_T K(t, u, \omega) X_u(\omega) d\mu(u), \quad \forall (t, \omega) \in T \times \Omega.$$

(iii) Deux exemples classiques d'équations intégrales stochastiques sont :

(a) l'**équation intégrale stochastique (linéaire) de E.I. FREDHOLM**, de la forme :

$$(4) \quad K(X) - \lambda X = Y,$$

où $\lambda \in \mathbf{C}$, Y et K sont donnés.

Ainsi, une **équation de FREDHOLM de deuxième espèce** s'écrit :

$$(5) \quad X_t(\omega) - \lambda \cdot \int \mathbf{1}(\mathbf{R}_+) K(t, u, \omega) X_u(\omega) d\mu(u) = Y_t(\omega),$$

où $\mathbf{1}(B)$ désigne la **fonction indicatrice** d'une **partie** B ;

(b) l'**équation de VOLTERRA de deuxième espèce** :

$$(6) \quad X_t(\omega) - \lambda \cdot \int \mathbf{1}([a, t]) K(t, u, \omega) X_u(\omega) d\mu(u) = Y_t(\omega),$$

où $\mathbf{1}([a, t])$ désigne la fonction indicatrice du segment $[a, t] \subset \mathbf{R}$;

(iv) Il existe des équations non linéaires de la forme :

$$(7) \quad X_t(\omega) - \lambda \cdot \int \mathbf{1}(\mathbf{R}_+) K\{t, u, X_u(\omega)\} d\mu(u) = Y_t(\omega),$$

ou encore :

$$(8) \quad X_t(\omega) - \lambda \cdot \int \mathbf{1}([a, t]) K\{t, u, X_u(\omega)\} d\mu(u) = Y_t(\omega).$$

On définit aussi des équations plus générales dans lesquelles $T = \mathbf{R}_+$ est remplacé par un **ensemble** quelconque, \mathbf{C} par un **espace normé** $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ (eg un **espace de BANACH**) et $K : T^2 \times \Omega \times \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ est un **noyau stochastique**.

(v) Les principaux problèmes posés par ce type d'équations sont :

(a) l'existence et à l'unicité des processus X solutions ;

(b) les **propriétés asymptotiques** « théoriques » (**convergences stochastiques**) des processus X solutions ;

(c) l'**approximation** numérique : **linéarisation**, méthodes par **approximations** successives (cf **théorème du point fixe**), **discrétisation** de l'équation ;

(d) les **problèmes d'estimation** : leur étude est fondée sur un **échantillon (trajectoire)** x de X et un échantillon y de Y . On admet alors que $P \in \mathcal{P}$, **famille de probabilités** définies sur \mathcal{T} .