ÉQUATION MATRICIELLE (A3)
(10 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On appelle **équation matricielle** une équation dans laquelle les inconnues, comme les données, sont, pour la plupart, des **matrices** (ou des **opérateurs**).

Ce type d'équations étant assez peu documenté, on en détaille ci-après quelques propriétés.

(ii) Parmi des exemples classiques, on considère les suivants :

(a) soit $A \in M_{mn}$ (**K**), $B \in M_{pq}$ (**K**) et $C \in M_{mq}$ (**K**).

On appelle **équation matricielle**, ou **système matriciel**, (linéaire) une équation en $X \in M_{np}$ (**K**) de la forme :

(1) $\quad A\,X\,B \;=\; C.$

On note :

(2) $\quad S\,(A, B, C) \;=\; \{X \in M_{np}\,(\mathbf{K}) : \; A\,X\,B = C\}$

l'ensemble des solutions de (1).

Si M^+ désigne la **matrice pseudo-inverse** de M, on montre que :

(α) $S\,(A, B, C) \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; A\,A^+\,C\,B^+\,B = C$;

(β) si $S\,(A, B, C) \neq \varnothing$, toute solution $X^\sim \in S\,(A, B, C)$ est de la forme :

(3) $\quad X^\sim \;=\; A^+\,C\,B^+ + H - A^+\,A\,H\,B\,B^+, \qquad \forall\, H \in M_{np}\,(\mathbf{K}).$

Inversement, $\forall\, S \in S\,(A, B, C)$, il existe une matrice H tq :

(4) $\quad S \;=\; A^+\,C\,B^+ + H - A^+\,A\,H\,B\,B^+.$

(b) le système (1) admet les deux cas particuliers suivants :

(5) $\quad A\,X \;=\; C \qquad$ (ie $q = p$ et $B = I_p$)

et :

(6) $\quad X\,B \;=\; D \qquad$ (ie $n = m$ et $A = I_m$),

dans lesquels $A \in M_{mn}$ (**K**), $B \in M_{pq}$ (**K**), $C \in M_{mp}$ (**K**) et $D \in M_{nq}$ (**K**).

Soit S (A, C) l'ensemble des solutions de (5) et S (B, D) celui de (6). On montre que :

(7) $S(A, C) \cap S(B, D) = \{\tilde{X}\} \Leftrightarrow S(A, C) \neq \varnothing, S(B, D) \neq \varnothing$ et $A\,D = C\,B$.

(iii) En **Statistique**, ce type d'équation apparaît assez couramment en **analyse multidimensionnelle** (cf **modèle de régression multidimensionnel**, **modèle d'interdépendance**).