ÉQUI-INTÉGRABILITÉ (B4, N)
(15 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $X = (X_i)_{i \in I}$ une **famille** de **vars** $X_i : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ définie sur le même **espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

On dit que X est une **famille (P-)équi-intégrable**, ou simplement une **famille équi-intégrable**, ssi, en notant $A_\alpha = [|X_i| > \alpha] \in \mathcal{T}$, on a :

(1) $\lim_{\alpha \to +\infty} \{\sup_{i \in I} \int_{A\alpha} |X_i| \, dP\} = 0,$

en notant $A\alpha$ pour désigner A_α .

(ii) Pour que X soit équi-intégrable, il suffit qu'il existe une fonction $f : \overline{\mathbf{R}}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$, mesurable et tq, à la fois :

(2)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) / x = +\infty,$$
$$\sup_{i \in I} E f(|X_i|) < +\infty.$$

Une telle fonction existe, eg :

(a) toute **fonction puissance** $x \mapsto f(x) = x^p$ (avec $p > 1$) ;

(b) la fonction $x \mapsto f(x) = x \,.\, (\mathrm{Log}\, x)^+$ (où a^+ désigne la **partie positive** de $a \in \mathbf{R}$).