ÉQUIVARIANCE (A5, G1)

L'**équivariance** est une forme d'**invariance** particulière.

(i) Soit E et F deux **espaces vectoriels** sur un corps **K**.

On dit que f : E x E ↦ F est une **application équivariante**, ou une **application invariante par translation**, ssi il existe une **application linéaire** α : F ↦ E tq :

(1) $f(x, y + \alpha(z)) = f(x, y) + z, \quad \forall (x, y, z) \in E \times E \times F.$

(ii) Ainsi, dans un **modèle de régression linéaire** exprimé dans un **espace d'observation** (X, y) selon :

(2) $y = X b + u,$

si l'on pose **K** = **R**, E = M_{NK} (**R**), F = $\mathbf{R}^N$ et a = X $\in$ E, alors un **estimateur** $b^{\sim} = t(X, y)$ de b est équivariant ssi il vérifie : $t(X, y + X b) = t(X, y) + b$.

Ceci est le cas de l'**estimateur des mco**.

(iii) En **Statistique**, on considère, plus généralement, un **espace mesurable** $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ et un **groupe de transformations** bimesurables g : $\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y}$, noté $\mathcal{G}$, ainsi qu'un espace mesurable (auxiliaire) $(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$ et une application $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-mesurable f : $\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Z}$. On dit alors que :

(a) y' $\in \mathcal{Y}$ et y'' $\in \mathcal{Y}$ sont deux **éléments équivalents** (et l'on note y' ~ y'') ssi il existe une transformation g $\in \mathcal{G}$ tq :

(3) $y'' = g(y').$

Les éléments de l'**espace quotient** $\mathcal{Y}$ / ~ sont appelés **orbites** de $\mathcal{Y}$ sous l'action de $\mathcal{G}$ (cf **orbite d'un point**) ;

(b) f est une **application équivariante** par $\mathcal{G}$ ssi :

(4) $f(y') = f(y'') \Rightarrow (f \circ g)(y') = (f \circ g)(y''), \quad \forall g \in \mathcal{G}.$

On montre que f est équivariante ssi :

(5) $\forall g \in \mathcal{G}, \exists g^*$ mesurable tq : $(f \circ g)(y) = (g^* \circ f)(y), \forall y \in \mathcal{Y}.$

L'ensemble $\mathscr{G}$* des applications g* : $\mathscr{Y} \mapsto \mathscr{Y}$ de ce type est un **groupe de transformations**.

(iv) La notion d'équivariance précédente est souvent une propriété caractérisant des **statistiques** usuelles : **estimateurs**, **statistiques de test** (cf **statistique équivariante**).