ERGODICITÉ (N2)
(03 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Dans la **théorie ergodique**, l'**ergodicité d'un système aléatoire** est une propriété tq celui-ci tend, selon un **mode de convergence** stochastique donné, vers un **état** limite indépendant de l'état initial (cf **convergence stochastique**) (cf aussi **équilibre**, **moyenne d'ensemble**).

Transposée à l'étude des **processus** ou des **séries temporelles**, la notion reçoit de nombreuses applications qui en précisent le contenu : eg **chaîne de MARKOV ergodique**, **mesure ergodique**, **théorème de BIRKHOV**, **théorème ergodique**, **théorème ergodique maximal**, **théorème ergodique pour des chaînes de MARKOV**, etc.

(i) A titre d'exemple, soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathbf{C}, \mathcal{B}_{\mathbf{C}}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus** complexe scalaire en **temps** discret ($T = \mathbf{Z}$), $\psi : \mathbf{C}^{H+1} \mapsto \mathbf{C}$ une fonction mesurable (où $H \in \mathbf{N}^*$ est donné) (cf **application mesurable**) et $T \in \mathbf{N}^*$ un nombre entier. On suppose que X est un **processus stationnaire en covariance**.

On appelle **moyenne temporelle** de ψ la **va** suivante :

$$(1) \qquad \mu_T(\psi) = \begin{cases} T^{-1} \Sigma_{t=1}^{T} \psi(X_t, X_{t+1}, ..., X_{t+H}) \\ T^{-1} \{\psi(X_1, X_2, ..., X_{1+H}) + ... + \psi(X_T, X_{T+1}, ..., X_{T+H})\}. \end{cases}$$

On dit que X est un **processus ergodique (au sens quadratique, ou dans L^2)** ssi, pour toute fonction ψ, la moyenne temporelle de ψ converge en moyenne quadratique vers la **moyenne** théorique de ψ, ie (cf **convergence en mq**) :

$$(2) \qquad \mu_T(\psi) \rightarrow^{m.q.}{}_{T \rightarrow +\infty} E\,\psi(X_t, X_{t+1}, ..., X_{t+H}), \qquad \forall\, t \in \mathbf{N}^* \text{ et } \forall\, H \in \mathbf{N}^*,$$

l'**espérance** du second membre étant calculée avec P.

Ainsi, la moyenne temporelle (membre de gauche de (2)) convergeant vers la moyenne théorique (membre de droite de (2)), la première peut constituer un **estimateur** de la seconde dès qu'on dispose d'une seule « réalisation » (**trajectoire** ou **série temporelle**) de X et que $T >> 0$.

Ce résultat est fondamental dans les **domaines de connaissance** où un **phénomène** donné ne peut être observé qu'à travers une seule trajectoire (temporelle), et non pas à l'aide de plusieurs séries temporelles simultanées du même processus : phénomène « historique », répétitivité impossible, etc. En effet, considéré comme un **système**, un phénomène peut alors s'associer à un processus :

(a) si ce processus est un **processus autorégressif** (scalaire ou vectoriel), et que des tests le confirment, il est alors « autogène » et peut de façon autonome être prolongé dans le futur (cf **extrapolation**, **projection**) ;

(b) si le processus considéré est ergodique (hypothèse à tester), on peut utiliser la moyenne temporelle, au lieu d'une moyenne « inter-individuelle » ou « spatiale », pour résumer les propriétés du phénomène (eg ses **propriétés asymptotiques**).

L'étude de la « vitesse de convergence » relative à la propriété (2) joue donc aussi un rôle important.

(ii) L'exemple précédent se généralise à un **processus matriciel** (ie à valeurs dans eg M_{mn} (**C**)) ou à un processus doté d'un **espace du temps** (T, $\mathcal{B}_T$, μ), dans lequel μ est une **mesure positive** et T possède un point à l'infini.

La **moyenne temporelle** est alors définie selon :

(3) $\mu_T (\psi) = \int_T \psi (X_t , X_{t+1} ,..., X_{t+H}) \, d\mu (t),$

où μ est supposée de **masse unité** (ie μ (T) = 1). La propriété d'ergodicité s'exprime encore sous la forme (2).

(iii) On peut étendre les défintions à d'autres **modes de convergence stochastique** que celle en moyenne quadratique : eg **convergence presque sûre** ou **convergence en loi** (cf aussi **convergence stochastique**).

L'ergodicité d'un processus est souvent associée à celle de **stationnarité**. Dans l'étude d'une série temporelle issue d'un processus stationnaire, l'**hypothèse d'ergodicité**, lorsqu'elle peut être testée, autorise donc le calcul d'estimateurs d'une **caractéristique** de la loi du processus à l'aide d'une seule « **observation** » (la trajectoire du processus).

D'où l'intérêt porté à l'étude des processus ergodiques : en effet, si un processus est ergodique, les **paramètres** de sa **loi** admettent, en général, des **estimateurs convergents**.

(iv) Une **chaîne de MARKOV** est un exemple de processus qui peut posséder des propriétés d'ergodicité.