ERREUR DE PREMIÈRE ESPÈCE, ERREUR DE SECONDE ESPÈCE (I)
(16 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) On considère un **problème de test** (**test pur** et statique) fondé sur un **modèle image** $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$, dans lequel $\mathscr{X}$ représente l'**espace d'observation** et Θ l'ensemble des **paramètres**.

On veut tester l'**hypothèse de base** :

(1) $H_0 : \theta \in \Theta_0$ (avec $\Theta_0 \neq \varnothing$)

contre l'**hypothèse alternative** :

(2) $H_1 : \theta \in \Theta_1$ (avec $\Theta_1 \neq \varnothing$).

On considère une **région critique** $w \in \mathscr{B}$ et l'on note $(P_\theta^X(w))_{\theta \in \Theta}$ la **famille** des **probabilités** attachées à cette région. Par suite :

(a) $\forall\ \theta \in \Theta_0$, le nombre $\alpha = P_\theta^X$ (w) est la probabilité de rejeter H_0 alors que cette hypothèse est vraie (rejet erroné), soit symboliquement $\alpha = P\ (H_1 / H_0)$. On l'appelle **(probabilité d') erreur de première espèce**, ou **(probabilité d') erreur du premier type**. On note souvent P_0^X (w) pour représenter P_θ^X(w) lorsque $\theta \in \Theta_0$;

(b) $\forall\ \theta \in \Theta_1$, le nombre $\beta = 1 - P_\theta^X\ (w) = P_\theta^X\ (w^c)$ est la probabilité d'accepter H_0 alors que cette hypothèse est fausse (acceptation erronée), soit symboliquement $\beta = P\ (H_0 / H_1)$. On l'appelle **(probabilité d') erreur de seconde espèce**, ou **(probabilité d') erreur du deuxième type**. On note souvent $P_1^X\ (w^c)$ pour représenter $P_\theta^X\ (w^c)$ lorsque $\theta \in \Theta_1$.

(ii) La recherche des tests dont les probabilités d'erreurs de chaque espèce soient, resp sur Θ_0 et sur Θ_1 , des fonctions les plus petites possibles est le fondement de la **théorie des tests**. Autrement dit, le statisticien souhaite que la fonction $\theta \mapsto P_\theta^X(w)$ soit la plus petite possible sur Θ_0 et la plus grande possible sur Θ_1 . Dans ce dernier cas, on cherche donc à maximiser la **fonction puissance** $\eta = 1 - \beta$ du test : cette valeur η est ainsi la probabilité $P_\theta^X\ (w) = 1 - \beta$ de rejeter H_0 (accepter H_1) alors que cette hypothèse est fausse (H_1 est vraie), soit symboliquement $\beta = P\ (H_1 / H_1)$.

(iii) La **théorie de J. NEYMAN - E.S. PEARSON** constitue une approche importante visant à résoudre le problème précédent : dans cette approche, l'**homme de l'art**, ou le **statisticien**, fixe a priori une valeur de α, puis il maximise la puissance η.

Autrement dit, la valeur α constitue un « risque » (maximum) acceptable pour lui ; il ne reste alors qu'à optimiser le problème pr à η. Dans un cadre paramétré, les risques α et β (ou η) dépendent des valeurs du **paramètre** θ. Il existe donc une **famille d'erreurs** pour chaque espèce : l'une indexée par Θ_0 , l'autre par Θ_1 . La théorie de NEYMAN-PEARSON consiste alors à prendre un majorant, noté α, de la famille $(\alpha_\theta)_{\theta \in \Theta_0}$, majorant fixé a priori et appelé **niveau du test** ou **seuil du test**.

Le tableau 2 x 2 ci-dessous représente en ligne les décisions du statisticien en fonction de l'état (« supposé vrai ») de la « **Nature** », en colonne le « vrai » état de la nature (cf schéma ci-dessous).

Etats de la nature j → Décisions i ↓	H_0 $0 : \theta \in \Theta_0$	H_1 $1 : \theta \in \Theta$
H_0 $0 : \theta \in \Theta_0$	$1 - \alpha$	β
H_1 $1 : \theta \in \Theta_1$	α	$1 - \beta$

Cette **table de décision à deux entrées** est typique des situations où l'on doit choisir entre des états possibles de la Nature : eg un état donné, désigné par 0, et l'ensemble des autres états, désigné par 1.

Si une décision i = 0 consiste à considérer que l'état j = 1 est le « vrai » état de la Nature alors que c'est l'état 0 = 1 - j, le décideur subit en général un coût c_{ij} dont la probabilité est α (cf **fonction de coût**). De même, la probabilité est β si i = 1 et j = 0.

(iv) En principe, la valeur de α est en général « petite » devant l'unité (ie α << 1). L'hypothèse H_0 est celle que l'**homme de l'art** ou le **statisticien** privilégient : souvent, c'est l'hypothèse qui domine dans le **domaine de connaissance** considéré (ie celle généralement acceptée, ou tenue pour valide). Il est donc naturel de restreindre au maximum la valeur de α, ce qui est parfois qualifié de « comportement conservateur » : la théorie existante (représentée par H_0) est maintenue tant que des « faits nouveaux » ne s'imposeront pas pr à cette théorie (modification de la théorie, ou nouvelle théorie).

Selon le domaine concerné, l'enjeu d'un test peut être plus ou moins important. On peut imposer :

(a) des valeurs tq 0,2 (20 %) ou 0,1 (10 %) si les conséquences pratiques résultant de la décision retenue ont un risque acceptable de se produire, ou impliquent coût supportable : eg inflation galopante (économie), gains d'un jeu ou victoire lors d'une rencontre (sociologie), etc ;

(b) des valeurs plus faibles tq 0,05 (5 %) ou 0,01 (1 %) si ces conséquences sont importantes : eg risque de séisme ou de raz de marée (physique), coût d'une pandémie (biologie), etc.

Une **fonction d'utilité** (celle de l'homme de l'art ou celle du statisticien) peut être associée à ce problème (cf aussi **utilité**).

(v) On peut considérer que l'alternative H_1 est « grevée » d'un « handicap » : son rôle est de lancer un défi (challenge) dans le but de « remplacer » l'hypothèse de base. Ceci peut être le cas lorsque des « évidences » sont observées : données nouvelles, correction d'erreurs passées, etc.

Cependant, les hypothèses H_0 et H_1 ne sont pas toujours « disjointes », car une situation tq $\Theta_0 \cap \Theta_1 \neq \varnothing$ n'est pas exclue de la théorie des tests. Dans ce cas, θ peut prendre des valeurs qui concilient les deux théories sous-jacentes (théories candidates en compétition).