ESPACE L^p (A5)
(06 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit (E, $\mathscr{A}$, μ) un **espace mesuré**, $\mathscr{M}(E, \overline{\mathbf{R}})$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{A}$-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $p \in [1, +\infty]$.

On définit sur $\mathscr{M}(E, \overline{\mathbf{R}})$ une semi-**norme** N_p selon :

$$(1) \quad \begin{cases} N_p(f) = \{\int^* |f|^p \, d\mu\}^{1/p} & \text{si } p \neq +\infty, \\ N_\infty(f) = \inf\{y \in \overline{\mathbf{R}}_+ : \mu([|f| \geq y]) = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\int^*$ désigne l'**intégrale** supérieure.

On appelle N_∞ (f) la **borne supérieure essentielle**, ou **borne supérieure en mesure**, de f.

(ii) On montre que, $\forall p \in [1, +\infty]$:

(a) $N_p(0) = 0$ et $N_p(\alpha . f) = \alpha . N_p(f)$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}_+$;

(b) $N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g)$, $\forall (f, g) \in \{\mathscr{M}(E, \overline{\mathbf{R}})\}^2$ (**inégalité de H. MINKOWSKI**) ;

(c) $f \leq g \Rightarrow N_p(f) \leq N_p(g)$ (croissance de la semi-norme) ;

(d) si $(p, q) \in]1,+\infty[\times]1,+\infty[$ est un couple de **nombres conjugués** (ie tq $p^{-1} + q^{-1} = 1$) ou si p = 1 et q = +∞, ou encore si p = +∞ et q = 1, l'**inégalité de O. HÖLDER** est vérifiée :

$$(2) \quad N_1(f\, g) \leq N_p(f) . N_q(g), \quad \forall (f, g) \in \{\mathscr{M}(E, \overline{\mathbf{R}})\}^2.$$

(iii) Si $N_p(f) < +\infty$, on dit que f est une **fonction de puissance p-ième intégrable** : ainsi f est dite intégrable si p = 1, de carré intégrable si p = 2, etc (cf **fonction intégrable**).

L'ensemble des fonctions dont la puissance p-ième est intégrable est un **espace vectoriel** semi-normé noté $\mathscr{L}_{\overline{\mathbf{R}}}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$, ou $\mathscr{L}_{\overline{\mathbf{R}}}^p(\mu)$, ou simplement $\mathscr{L}^p$ si aucune ambiguïté sur l'espace mesuré n'en résulte (cf aussi **espace normé**).

(iv) Soit $\mathscr{N} = \{f \in \mathscr{L}^p : \mu([f \neq 0]) = 0\}$ l'ensemble des fonctions μ-négligeables de L^p (cf **fonction négligeable**).

Deux fonctions f et g sont appelées **fonctions μ-équivalentes** ssi $f - g \in \mathscr{N}$. $\mathscr{N}$ définit ainsi une **relation d'équivalence** sur $\mathscr{L}^p$. L'ensemble des **classes**

d'équivalence de $\mathscr{L}^p$, ie l'**ensemble quotient** $\mathscr{L}^p / \mathscr{N}$, est noté $L_{\bar{\mathbf{R}}}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$ (ou encore $L_{\bar{\mathbf{R}}}^p(\mu)$, ou simplement L^p).

On définit, de manière analogue :

(a) les espaces $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$ (resp $L_{\mathbf{C}}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$) comme les espaces vectoriels des (resp classes de) fonctions $\mathscr{A}$-mesurables, à valeurs dans **C**, qui sont de puissance p-ième intégrable (pr à μ) ;

(b) les espaces $\mathscr{L}_{\mathbf{K}(n)}^p(E,\mathscr{A},\mu)$ (resp $L_{\mathbf{K}(n)}^p(E,\mathscr{A},\mu)$) des (classes de) fonctions à valeurs dans $\mathbf{K}^n$ qui sont de puissance p-ième intégrable, ie dont chaque coordonnée est dans $\mathscr{L}_{\mathbf{K}}^p$ (resp dans $L_{\mathbf{K}}^p$), avec **K** = **R** ou **K** = **C** (où **K**(n) désigne $\mathbf{K}^n$).

(v) De façon générale, si F est un espace vectoriel réel (resp complexe) de dimension finie (Dim F = n), on note $\mathscr{L}_F^p(E,\mathscr{A},\mu)$ l'espace semi-normé des fonctions $f : E \mapsto F$ qui sont de puissance p-ième intégrable, ie dont chaque fonction coordonnée, rapportée à une **base** $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de F, est de puissance p-ième intégrable.

L'**espace quotient** est alors noté $L_F^p(E,\mathscr{A},\mu)$ ou simplement L_F^p. On suppose alors que F est muni d'une **tribu borélienne** $\mathscr{B}_F$ et que les fonctions f considérées sont $(\mathscr{A},\mathscr{B}_F)$-mesurables.

(vi) On étend la définition des espaces L_F^1 au cas où F est un **espace de BANACH** (cf **intégrale de PETTIS**).

(vii) La convergence pour la norme N_p définie sur L^p est appelée **convergence en moyenne d'ordre p**, ou **convergence en norme dans L^p** (cf **convergence dans L^p**).

On parle de **convergence en moyenne** lorsque p = 1, de **convergence en moyenne quadratique** lorsque p = 2.

Lorsqu'on munit F d'un **produit scalaire** $(y', y'') \mapsto y' . y''$, l'espace $L_F^2(E,\mathscr{A},\mu)$ devient un espace pré-hilbertien s'il est muni, à son tour, du produit scalaire suivant :

(3) $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int f . g \, d\mu$,

dont la norme associée est justement N_2 (norme aussi notée $\|.\|_2$). Cet espace est complet : donc L_F^2 est un **espace de HILBERT** réel (ou complexe).

(vii) Lorsque les fonctions $f : E \mapsto F$ sont des **variables aléatoires** (ie des **applications mesurables**), on définit ainsi des espaces généraux de **va**.