ESPACE CONNEXE (A4)
(26 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Un **espace topologique** (E, $\mathcal{O}$) est appelé **espace connexe** ssi il n'est pas la réunion de deux **parties ouvertes** (resp fermées), disjointes et non vides.

Autrement dit, les seules **parties** de E qui sont à la fois ouvertes et fermées sont E et $\varnothing$.

Formellement, ces deux propriétés s'écrivent :

(a) il n'existe pas (A, B) $\in \mathcal{O}^2$ (resp $\mathcal{F}^2$) tq Π_E = {A, B} soit une **partition** de E vérifiant A $\neq \varnothing$ et B $\neq \varnothing$;

(b) A $\in \mathcal{O} \cap \mathcal{F} \Rightarrow$ A $\in$ {E, $\varnothing$},

où $\mathcal{O}$ (resp $\mathcal{F}$) désigne la classe des ouverts (resp des fermés) de E.

(ii) On appelle **partie connexe** d'un espace topologique (E, $\mathcal{O}$) un sous-espace topologique de (E, $\mathcal{O}$) pour lequel la définition précédente de connexité s'applique.

On note eg $\mathcal{C}$(E) ou $\mathcal{C}_E$ la **classe des parties connexes** de E.

(iii) (E, $\mathcal{O}$) étant un espace topologique, l'ensemble des parties connexes de E contenant un point donné x $\in$ E possède un plus grand élément, qui est la réunion des parties connexes contenant x.

Cette réunion est appelée **composante connexe** de x et on la note C (x) ou C_x .

Si, $\forall$ x $\in$ E, Card C (x) = 1, on dit que E est un **espace totalement discontinu** ou un **espace totalement déconnecté**.

(iv) On appelle **espace localement connexe** un espace topologique (E, $\mathcal{O}$) tq, $\forall$ x $\in$ E, il existe un système fondamental de **voisinages** connexes de x.

Certains espaces connexes vérifient le **théorème de B. BOLZANO**, ou **théorème des valeurs intermédiaires** : si (E, d) est un **espace métrique** connexe, f : E $\mapsto$ **R** une **fonction numérique** continue (cf **application continue**) et (a, b) $\in$ E^2 deux points tq f (a) < f (b), alors $\forall$ y $\in$]f (a), f (b)[, $\exists$ x $\in$ E tq f (x) = y.