ESPACE DE BANACH (A4)
(10 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit (E, ||.||) un **espace vectoriel normé**.

On dit que (E, ||.||) est un **espace de S. BANACH**, ou un **espace banachique**, ou parfois un **B-espace**, ssi (E, ||.||) complet pour la **norme** ||.||.

Ainsi, les ensembles numériques $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$, ou encore tout **espace de HILBERT**, sont des espaces de BANACH. Il en est de même de $L_{\mathbf{R}}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ (resp $L_{\mathbf{C}}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$), espaces des (classes de) **fonctions numériques** intégrables f : $\Omega \mapsto \mathbf{R}$ (resp $\mathbf{C}$) (cf **fonction intégrable**).

(ii) Un espace de BANACH (E, ||.||) est appelé **espace de S. BANACH de type 2**, ou **espace de S. BANACH du second type**, ssi il existe $\alpha > 0$ tq, pour tout n-uple $x = (x_1, ..., x_n) \in E^n$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

(1) $$2^{-n} . \Sigma_{a \in A} ||a_1 x_1 + ... + a_n x_n||^2 \leq \alpha . \Sigma_{i=1}^n ||x_i||^2,$$

où $a = (a_1, ..., a_n) \in A = \{-1, +1\}^n$.

Ainsi, un espace de HILBERT est de type 2. Les espaces $E = L_{\mathbf{K}}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, avec $p \in [2, +\infty[$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$), sont aussi du second type.