ESPACE EUCLIDIEN (A4, A13)
(21 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Espace de « travail » courant en Statistique.

(i) Soit E un **espace vectoriel** sur le corps **R** et b une forme bilinéaire symétrique sur E (cf **forme multilinéaire**, **symétrie**).

On dit que E est un **espace euclidien** ssi E la **forme quadratique** associée à b est définie positive. On note alors eg (E, b), (E, .) ou (E , ·) cet espace.

L'image b (x, y) $\in$ **R** du couple (x, y) $\in$ $\mathbf{R}^2$ par b est souvent appelée **produit scalaire (euclidien)** de x et y ; on note aussi (x | y), ou x.y, ou < x , y > ou même (x , y) ce produit.

(ii) Lorsque E est de dimension finie (dim E = n), on note aussi cette image selon x' y ou y' x, en identifiant les vecteurs de E avec les (n,1)-**matrices** réelles de leurs coodonnées dans une **base** donnée de E.

On peut associer à b une **norme** ||.|| définie sur E selon :

(1) $x \in E \mapsto ||x|| = b(x, x)$.

A cette norme correspond alors la **distance euclidienne** d sur E définie selon le procédé classique $(x, y) \mapsto d(x, y) = ||x - y||$.

(iii) Lorsque E = $\mathbf{R}^n$, muni de la **base canonique** $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$, on considère souvent la forme bilinéaire suivante :

(2) $(x, y) \mapsto b_Q(x, y) = \Sigma_i \Sigma_j q_{ij} x_i y_j = x' Q^{-1} y$,

dans laquelle $x = \Sigma_i x_i e_i$, $y = \Sigma_j y_j e_j$, $(i, j) \in (N_N^*)^2$ et Q est une **matrice symétrique** définie positive (souvent, $Q = I_n$) (cf **matrice définie positive**).

On dit alors que la distance :

(3) $(x, y) \mapsto (x - y)' Q^{-1} (x - y)$

associée à b_Q est la **distance selon la métrique Q**, ou selon la métrique définie par Q^{-1} (ou Q-**métrique**), entre x et y.