ESPACE MESURABLE, ESPACE MESURÉ (A5)
(21 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $\mathscr{X}$ un **ensemble**, $\mathscr{B}$ une **tribu de parties** (ou un **σ-anneau de BOOLE**) de $\mathscr{X}$, et μ une **mesure** définie sur $\mathscr{B}$.

On appelle :

(a) **espace mesurable** le couple ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) ;

(b) **espace mesuré**, ou **espace de mesure**, le triplet ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, μ) constitué d'un espace mesurable ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) et de μ.

La mesure μ est souvent une **mesure positive**. Un espace mesurable est parfois muni d'une **famille** $\mathscr{M}$ de telles mesures, ce que l'on note ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{M}$).

(ii) Un **espace probabilisé** est un espace mesuré particulier dans lequel la mesure μ est une **mesure de probabilité** P.

Les notations de la **théorie des probabilités** diffèrent généralement de celle de la **théorie de la mesure**. Un espace probabilisé est plutôt noté :

(a) tantôt (Ω, $\mathscr{T}$, P) pour représenter un **espace de base** (ou **espace fondamental**), où P désigne une **mesure de probabilité**. Ce contexte s'associe généralement à une **population** Ω, et P peut eg désigner un mode de tirage des unités $\omega \in \Omega$ (cf **plan d'expérience**, **plan de sondage**) ;

(b) tantôt ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, P^{ξ}) pour représenter un **espace d'observation**, ie l'espace image du précédent par une **va** ξ : ici, P^{ξ} désigne la **loi de probabilité** de ξ, elle-même image de P par ξ, ie $P^{\xi} = \xi$ (P) (cf **mesure image**). Ce contexte s'associe généralement à l'**observation** de la variable ξ sur les unités $\omega \in \Omega$. Cette variable peut être « simple » (eg « scalaire ») ou « multiple » (eg vectorielle).

(iii) Selon l'un des deux cas précédents, on appelle :

(a) **modèle statistique**, ou **représentation statistique**, ou **structure statistique**, **de base** (ou **fondamental(e)**) un espace probabilisable (Ω, $\mathscr{T}$) doté d'une **famille** $\mathscr{P}$ de **probabilités** P définies sur $\mathscr{T}$, ie (Ω, $\mathscr{T}$, $\mathscr{P}$). On peut aussi le considérer comme une famille d'espaces probabilisés (Ω, $\mathscr{T}$, P) indexée par $P \in \mathscr{P}$, ie $(\Omega, \mathscr{T}, P)_{P \in \mathscr{P}}$ (cf aussi **paramétrique**, **paramétrisation**, **Statistique non paramétrique**) ;

(b) **modèle statistique**, ou **représentation statistique**, ou **structure statistique**, **image** (ou **d'observation**, **observationnel(le)**) un espace probabilisable ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) doté d'une famille $\mathscr{P}^{\xi}$ de probabilités P^{ξ} définies sur $\mathscr{B}$, ie ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{P}^{\xi}$). On peut aussi le considérer comme une famille d'espaces probabilisés (Ω, $\mathscr{T}$, P^{ξ}) indexée par $P^{\xi} \in \mathscr{P}^{\xi}$, ie $(\Omega, \mathscr{T}, P^{\xi})_{P^{\xi} \in \mathscr{P}^{\xi}}$.

(iv) Un **espace probabilisable** (eg image) est souvent muni, à la fois, de probabilités et de mesures, toutes deux définies sur $\mathscr{B}$: c'est le cas, notamment, lorsque $\mathscr{P}^{\xi}$ est uniformément dominée par une mesure μ donnée (cf **famille de lois dominée**, **modèle dominé**).

(v) On définit parfois un **espace mesuré** (eg image) comme un couple ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) dans lequel $\mathscr{B}$ n'est pas nécessairement une tribu, mais une **structure** ensembliste plus simple : eg $\mathscr{B}$ est un **clan** ou une **algèbre** de **parties** de $\mathscr{X}$. La mesure μ définie sur $\mathscr{B}$ est alors « complétée » (ou « étendue ») en une mesure μ^{σ} définie sur la tribu $\sigma(\mathscr{B})$ engendrée par $\mathscr{B}$ (cf **tribu engendrée**, **plongement**).

(vi) La notion d'espace mesurable conduit à celle d'**espace mesurable produit** (cf **produit d'espaces mesurables**).

(a) soit $(\mathscr{X}_i, \mathscr{B}_i)_{i \in I}$ une **famille** (finie) d'espace mesurables et $\mathscr{X} = \Pi_{i \in I} \mathscr{X}_i$ le produit cartésien associé.

On appelle **espace mesurable produit**, ou **produit des espaces mesurables** ($\mathscr{X}_i$, $\mathscr{B}_i$), l'espace mesurable ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) tq :

$$(1) \quad \begin{cases} \mathscr{X} = \Pi_{i \in I} \mathscr{X}_i & \text{(produit cartésien usuel),} \\ \mathscr{B} = \{B = \Pi_{i \in I} B_i : B_i \in \mathscr{B}_i, \forall i \in I\} & \text{(tribu définie par des « pavés » B).} \end{cases}$$

Cette dernière tribu est conventionnellement notée $\mathscr{B} = \otimes_{i \in I} \mathscr{B}_i$;

(b) il est souvent nécessaire d'étendre la notion de produit d'espace mesurable à une famille quelconque de tels espaces : ceci est notamment l'objet de l'approche probabiliste en **théorie des processus** (cf **processus stochastique**, **système projectif de probabilités**).