ESPACE MESURÉ COMPLET (A5)

(i) Soit (E, $\mathscr{A}$, μ) un **espace mesuré**.

On dit que cet espace est un **espace mesuré complet** ssi toute **partie** B de E incluse dans une **partie mesurable** A $\in \mathscr{A}$, qui est elle-même μ-négligeable (cf **partie négligeable**), est mesurable, ie :

(1) $\quad$ P (A $\in \mathscr{A}$: μ (A) = 0, et B $\in \mathscr{P}$(E) : B $\subset$ A) $\Rightarrow$ B $\in \mathscr{A}$.

Autrement dit, la **tribu** $\mathscr{A}$ contient tous les **ensembles négligeables**.

Si la condition (1) est vérifiée, on dit aussi que $\mathscr{A}$ est une **tribu complète** et que μ est une **mesure complète**.

(ii) Il est important de construire un espace complet à partir d'un espace qui ne l'est pas. C'est ce que permet la propriété suivante.

Soit (E, $\mathscr{A}$, μ) un espace mesuré quelconque. On pose :

(2) $\quad \mathscr{A}^{\#}(\mu) = \{P \in \mathscr{P}(E) : \exists (A, B) \in \mathscr{A}^2 : A \subset P \subset B \text{ et } \mu (B \setminus A) = 0\}$.

Alors $\mathscr{A}^{\#}(\mu)$ est un **σ-anneau booléen** contenant A et l'on peut prolonger μ en une mesure $\mu^{\#}$ sur $\mathscr{A}^{\#}(\mu)$.

L'espace mesuré complet (E, $\mathscr{A}^{\#}(\mu)$, $\mu^{\#}$) ainsi engendré s'appelle l'**espace complété**, ou simplement le **complété**, de l'espace mesuré (E, $\mathscr{A}$, μ).

De même, on dit que $\mathscr{A}^{\#}$ (μ) est la **tribu complétée** de $\mathscr{A}$ et $\mu^{\#}$ la **mesure complétée** de μ.

(iii) Ainsi :

(a) la complétée de la **mesure de BOREL** est la **mesure de LEBESGUE** ;

(b) la complétée de la **mesure de BOREL-STIELTJES** est la **mesure de LEBESGUE-STIELTJES**.