

## ESPACE MÉTRIQUE (A4)

(25 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **espace métrique** est un **espace topologique** particulier, très utilisé en raison du rôle important joué par la notion de **distance** en **Statistique** : **analyse des données**, **classification**, **comparaison de modèles**, **estimateur à distance minimale** ou **estimateur à distance minimum** (ou encore estimateur par **projection**) (cf eg **proximité entre estimateurs**), **test d'adéquation**, etc.

(i) Soit  $E$  un **ensemble** quelconque et  $d : E^2 \mapsto \mathbf{R}_+$  une **fonction numérique**.

On dit que  $d$  est une **distance**, ou **métrique**, sur  $E$  ssi elle vérifie,  $\forall (x, y, z) \in E^3$ , les trois axiomes suivants :

(a) **symétrie** :  $d(y, x) = d(x, y)$  ;

(b) **séparation**, ou identité :  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (ou encore  $d(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \neq y$ ) ;

(c) **inégalité triangulaire**, ou **inégalité du triangle** :

(1)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Le couple  $(E, d)$  est appelé **espace métrique**, ou **espace à distance**, ou **espace distancié**.

(ii) On montre (par récurrence) que l'inégalité triangulaire conduit à l'**inégalité du polygone** :

(2)  $d(a, b) \leq \sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i), \quad \forall (x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*,$

avec  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ .

(iii) On appelle **semi-distance**, ou **pseudo-distance**, ou **quasi-distance**, sur  $E$  une fonction numérique  $d : E^2 \mapsto \mathbf{R}_+$  vérifiant les axiomes (a), (c) ainsi que l'axiome :

(e)  $y = x \Rightarrow d(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in E^2$ .

Il peut alors exister des couples  $(x, y) \in E^2$  tq  $y \neq x$  et  $d(x, y) = 0$ .

Dans certains cas (eg **analyse des données**, **statistique du chi-deux**), on conserve seulement les axiomes (b) et (c) (absence de symétrie).

Le couple  $(E, d)$  est alors appelé, de façon conforme, **espace semi-métrique**, ou **espace pseudo-métrique**, ou **espace quasi-métrique**.

Une semi-distance est un **écart** particulier (ie qui ne prend que des valeurs finies).

(iv) On peut définir plusieurs distances sur un ensemble. Si  $d'$  et  $d''$  sont deux distances sur  $E$ , les espaces métriques  $(E, d')$  et  $(E, d'')$  sont généralement distincts du point de vue de leur **topologie**, sauf lorsque les distances sont « équivalentes » (cf aussi **homéomorphisme**).

(iii) On montre qu'un espace métrique est un **espace séparé**.