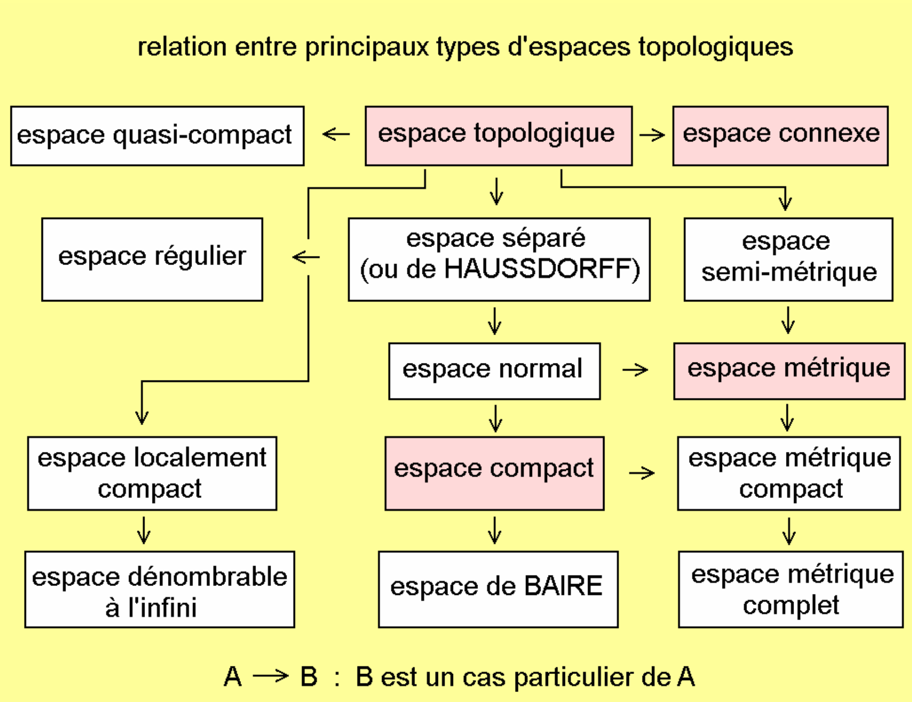
ESPACE TOPOLOGIQUE (A4)
(07 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

De nombreux **ensembles** considérés en **Statistique** possèdent une **structure** d'espace topologique : eg $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$, M_{mn} (**R**) ou M_{mn} (**C**), mais aussi L^p ou d'autres espaces fonctionnels (ensemble des **trajectoires** d'un **processus**, **famille** de **densités de probabilité**, de **variables aléatoires** ou de **statistiques**).

Le schéma ci-dessous décrit les articulations entre principaux espace topologiques.



(i) Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(E)$ une famille de **parties** d'un **ensemble** E.

On dit que $\mathcal{O}$ est une **topologie** sur E ssi elle vérifie les trois axiomes suivants :

(a) $E \in \mathcal{O}$ et $\varnothing \in \mathcal{O}$;

(b) $A \in \mathcal{O}$ et $B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}$ (**stabilité par intersection finie**) ;

(c) $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$ pour toute famille $A = (A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}$ (I quelconque, ie non nécessairement fini) (**stabilité par réunion quelconque**).

L'axiome (b) s'étend à toute famille finie $B = (B_j)_{j \in J}$ (Card J < $+\infty$) d'éléments $B_j \in \mathcal{O}$.

(ii) Tout élément $U \in \mathcal{O}$ est appelé **partie ouverte**, ou simplement un **ouvert**, de E ; la famille $\mathcal{O}$ est appelée **famille des ouverts** de E et le couple (E, $\mathcal{O}$) **espace topologique**, ou **espace à topologie**.

D'autres topologies peuvent intervenir : $\mathcal{O}$ est alors distingué à l'aide une notation spécifique, eg $\mathcal{O}_E$ ou $\mathcal{O}(E)$.

Une partie $F \in \mathcal{P}(E)$ est appelée **partie fermée**, ou simplement un **fermé**, de E ssi $F^c \in \mathcal{O}$: F est complémentaire d'un ouvert de E (ie il existe $O \in \mathcal{O}$ tq $F^c = O$). On note $\mathcal{F}$, ou $\mathcal{F}_E$, ou encore $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des parties fermées de E, ou **famille des fermés** de E.

Par suite, se donner le couple (E, $\mathcal{O}$) ou le couple (E, $\mathcal{F}$) est équivalent.

(iii) On appelle **voisinage d'un point** $x \in E$ toute partie $\mathcal{V}_x \in \mathcal{P}(E)$ qui contient un ouvert contenant x, ie : $\exists\, U \in \mathcal{O}$ tq $U \subset \mathcal{V}_x$ et $x \in U$. On appelle **voisinage d'une partie** P de E toute partie $\mathcal{V}_P \in \mathcal{P}(E)$ qui est voisinage de chacun des points x de P.

(iv) Sur un ensemble donné, il peut exister plusieurs topologies $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$, etc. Ainsi, tout ensemble E possède :

(a) une **topologie grossière**, ou **topologie chaotique**, ou encore **topologie du tout ou rien**, qui n'est autre que $\mathcal{O}' = \mathcal{F}' = \{\emptyset, E\}$ (parfois notée $\mathcal{O}_{min}$ ou $\mathcal{O}_{01}$) ;

(b) une **topologie la plus fine**, parfois appelée **topologie discrète**, qui n'est autre que $\mathcal{O}'' = \mathcal{P}(E)$ (famille des parties de E) (parfois notée $\mathcal{O}_{max}$ ou $\mathcal{O}_\infty$).

(v) En **théorie de la mesure** et en Statistique, on peut toujours doter d'une **structure mesurable** un espace topologique donné (E, $\mathcal{O}$).

En effet, on peut définir une tribu $\mathcal{A}$ sur E, appelée **tribu borélienne**, ou **tribu de E. BOREL**. Cette tribu est la plus petite tribu engendrée par la famille $\mathcal{O}$ des ouverts, ie : $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{O})$. L'**espace mesurable** ou l'**espace probabilisable** (E, $\mathcal{A}$) s'en déduit.

Lorsqu'une topologie est donnée, l'espace mesurable correspondant est souvent implicite.