ESPACE VECTORIEL (A3)
(22 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit E un **ensemble** et **K** un corps commutatif.

On dit que E est un **espace vectoriel** sur **K**, ou un **K-espace vectoriel**, ssi :

(a) il existe une loi de composition interne sur E, appelée **addition** et notée +, définie par une **application** $(x, y) \mapsto x + y$ de E^2 dans E, et qui fait de (E, +) un **groupe** abélien (dont l'élément neutre est noté 0 ou 0_E) ;

(b) il existe une loi de composition externe sur E, appelée **homothétie** et notée . (ou sans symbole particulier), définie par une application $(\lambda, x) \mapsto \lambda . x$ de **K** x E dans E, et tq :

$$\lambda (\mu . x) = (\lambda . \mu) x, \qquad \forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbf{K}^2 \times E,$$

(1)

$$1 . x = x, \qquad \forall x \in E ;$$

(c) les deux opérations précédentes se « distribuent » entre elles comme suit (propriété de **distributivité mixte**) :

$$(\lambda + \mu) . x = \lambda . x + \mu . x, \qquad \forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbf{K}^2 \times E,$$

(2)

$$\lambda . (x + y) = \lambda . x + \lambda . y, \qquad \forall (l, x, y) \in \mathbf{K} \times E^2.$$

(ii) Ainsi, la puissance cartésienne $E = \mathbf{K}^n$ de **K**, où $n \in \mathbf{N}^*$, est un espace vectoriel sur **K** lui-même. Un élément $x \in \mathbf{K}^n$ se représente généralement par un vecteur colonne $x = (x_1 ,..., x_n)'$.

Très souvent, on a **K** = **R** ou **C**.

De même, l'ensemble M_{mn} (**K**) des (m,n)-**matrices** sur **K** est un espace vectoriel.

(iii) Une **partie** L de E est appelée **sous-espace vectoriel** (sev) de E ssi L est elle-même un espace vectoriel (pour la **restriction** à L des deux opérations précédentes : addition et homothétie).

(iv) Soit L un sev de E. On dit que M est un **sous-espace vectoriel supplémentaire** de L, ou que L et M sont des **sous-espaces vectoriels supplémentaires entre eux**, ssi :

(3) $\quad L + M = E, \qquad$ où $L + M = \{x \in L, y \in M : x + y \in E\}$.

On note souvent $L \oplus M$ au lieu de L + M.

(v) Les espaces vectoriels interviennent dans toutes les branches de la **Statistique**. Ils sont souvent dotés d'une **structure** topologique (ou **topologie**) (cf **espace**

vectoriel topologique) ou d'une structure mesurable (cf **espace vectoriel mesurable**) (associée aux opération linéaires précédentes).