ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE (A4)
(21 / 10 / 2021, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2021)

(i) Soit E un **espace vectoriel** sur un corps **K** (avec **K** = **R** ou **K** = **C**).

E est appelé **espace vectoriel topologique** (evt) ssi :

(a) l'application a : $(x, y) \mapsto x + y$ de E^2 dans E (addition) est une **application continue** sur l'espace topologique produit E^2 ;

(b) l'application h : $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de **K** x E dans E (homothétie) est une application continue sur l'espace topologique produit **K** x E.

Ceci suppose donc que E et **K** sont des **espaces topologiques**. Autrement dit, il existe sur E (resp sur **K**) une **topologie** $\mathcal{O}_E$ (resp $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$) tq les applications a et h soient compatibles avec ces topologies.

On note $(E, \mathcal{O}_E)$ ou $(E, \mathcal{O}(E))$ l'espace topologique ainsi défini. Il est dénommé réel ou complexe en fonction de la nature de **K**.

(ii) Un **espace vectoriel normé** (E, ||.||) est un espace vectoriel topologique.

De même l'**ensemble** E = $\mathbf{K}^n$, muni de l'une quelconque des normes suivantes (équivalentes entre elles) :

$$||x||_1 = \Sigma_{i=1}^n |x_i|,$$

(1) $$||x||_2 = (\Sigma_{i=1}^n x_i^2)^{1/2},$$

$$||x||_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|,$$

est un evt.

(iii) Comme tout espace topologique, un evt E possède une **tribu borélienne**, ce qui permet de définir les concepts usuels du **calcul des probabilités** et de la **Statistique** : **mesure de probabilité**, **application mesurable** (entre evt), **loi de probabilité**, etc.