ESPÉRANCE CONDITIONNELLE (C5, D1, D2, F3, J)
(27 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Dérivée de la notion d'**espérance mathématique**, l'important concept probabiliste d'**espérance conditionnelle** joue un rôle fondamental en **calcul des probabilités** et en **Statistique**. Elle est la base :

(a) du concept de **relation fonctionnelle** (conditionnelle), et en particulier de **régression** (conditionnelle) ;

(b) du concept de **conditionnement** d'une **variable aléatoire** ou d'une **tribu** ;

(c) ainsi que de l'étude de certains **processus stochastiques** (cf eg **chaîne de MARKOV**, **martingale**).

Les notions présentées sont celles de conditionnement pr à une tribu et de conditionnement pr à une **va** (ou pr à une **statistique**).

(i) Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\eta : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** intégrable : $\eta \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^{1}(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

Quelle que soit la sous-tribu $\mathscr{S}$ de $\mathscr{T}$, et quelle que soit $\eta \in \eta^{\sim}$ (**classe d'équivalence** des va P-équivalentes à η), il existe une (classe de) va $\mathscr{S}$-mesurables, notée $E(\eta / \mathscr{S})$, tq :

(1) $\int_A \eta \, dP = \int_A \varepsilon \, dP$, $\forall A \in \mathscr{S}$ et $\forall \varepsilon \in E(\eta / \mathscr{S})$.

Cette classe $E(\eta / \mathscr{S})$ est appelée **espérance conditionnelle** de η pr à la tribu $\mathscr{S}$.

Par abus de language, un représentant quelconque de cette classe, soit ε, est aussi appelé espérance conditionnelle de η pr à (ou sachant) $\mathscr{S}$.

L'espérance conditionnelle est aussi notée $E^{\mathscr{S}} \eta$ ou parfois $E_{\mathscr{S}} \eta$.

La relation (1), qui définit l'espérance conditionnelle, s'écrit, de façon équivalente :

(2) $E\, \mathbf{1}_A \eta = \int_A \eta \, dP = \int_A \varepsilon \, dP = E\, \mathbf{1}_A \varepsilon$,

pour tout $A \in \mathscr{S}$ et pour tout représentant $\varepsilon \in E(\eta / \mathscr{S})$.

(ii) Dans le même cadre que précédemment, soit $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ un **espace mesurable** et $\xi : \Omega \mapsto \mathscr{X}$ une va. Par définition de ξ, la **famille** $\xi^{-1}(\mathscr{B})$ est une sous-tribu $\mathscr{S}$ de $\mathscr{T}$.

On définit l'**espérance conditionnelle** de η pr à la va ξ comme l'espérance conditionnelle de η pr à la sous-tribu $\mathcal{S} = \xi^{-1} (\mathcal{B})$. Autrement dit, en notant E (η / ξ) cette espérance conditionnelle, on pose :

(3) $\quad E (\eta / \xi) = E (\eta / \mathcal{S}) = E (\eta / \xi^{-1} (B))$.

L'espérance conditionnelle de η pr à ξ est aussi appelée espérance (conditionnelle) de η sachant ξ. On la note ecore $E^{\xi} \eta$ ou $E_{\xi} \eta$.

Souvent, on désigne par le même symbole tout représentant de cette classe d'équivalence. La valeur de ce représentant (qui est une va) en un point $x \in \mathcal{X}$ est alors notée $E (\eta / \xi = x)$ (ou $E^{\xi = x} \eta$, ou $E_{\xi = x} \eta$).

(iii) La notion de **probabilité conditionnelle** peut être conçue comme cas particulier important d'espérance conditionnelle. La **fonction indicatrice** d'un **événement** $B \in \mathcal{T}$ étant une va particulière, la **probabilité conditionnelle** de B pr à $\mathcal{S}$ est définie par :

(4) $\quad P (B / \mathcal{S}) = E (\mathbf{1}_B / \mathcal{S})$.

De même, la probabilité conditionnelle de B pr à la va ξ précédente est définie par :

(5) $\quad P (B / \xi) = E (\mathbf{1}_B / \xi)$.

La valeur au point $x \in \mathcal{X}$ de cette probabilité est appelée **probabilité conditionnelle de l'événement** B sachant que $\xi = x$ et on la note $P (B / \xi =x)$ (ou $P^{\xi = x} (B)$, etc). Autrement dit, la définition (3) s'explicite ici selon :

(6) $\quad P (B \cap [\xi \in C]) = \int_C P (B / \xi = x) \, dP^{\xi}(x), \qquad \forall (B, C) \in \mathcal{T} \times \mathcal{B}$,

où P^{ξ} est la **loi marginale** (ie la « loi propre ») de la va ξ.

(iv) On peut définir l'**espérance conditionnelle** d'une va η à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$, ensemble muni de sa **tribu borélienne**, à l'aide de la notion d'intégrale supérieure : on remplace, dans les définitions, le symbole intégral $\int$ par celui de l'intégrale supérieure $\int^*$ (cf **intégrale**).

D'autre part, la notion d'espérance conditionnelle (pr à une tribu ou pr à une va) se généralise directement au cas de va η à valeurs dans des espaces plus généraux que $\mathbf{R}$, eg au cas de $\eta : \Omega \mapsto F$, où $(F, \mathcal{B}_F)$ est un **espace vectoriel normé** (eg un **espace de BANACH**).

(v) L'espérance conditionnelle (eg pr à une sous-tribu $\mathcal{S}$) possède les **propriétés** suivantes :

(a) $E(\eta / \mathcal{S})$ est une **forme linéaire** positive et monotone sur l'espace des va intégrables, ie :

$$\eta \geq 0 \text{ (P-p.s.)} \Rightarrow E(\eta / \mathcal{S}) \geq 0 \text{ (P-p.s.)} ;$$

$$E(\alpha\, \eta' + \beta\, \eta'' / \mathcal{S}) = \alpha\, E(\eta' / \mathcal{S}) + \beta\, E(\eta'' / \mathcal{S}), \qquad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^2 ;$$

$$0 \leq \eta' \leq \eta'' \text{ (P-p.s.)} \Rightarrow E(\eta' / \mathcal{S}) \leq E(\eta'' / \mathcal{S}) \quad \text{(P-p.s.)} ;$$

(b) η est intégrable ssi $E(|\eta| / \mathcal{S})$ est intégrable. Alors :

(7) $$E\, \eta = E\{E(\eta / \mathcal{S})\} \quad \text{et} \quad |E(\eta / \mathcal{S})| \leq E(|\eta| / \mathcal{S}) ;$$

(c) si $\eta = (\eta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante de va $\eta_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ qui converge vers η_∞ , on établit le **lemme de FATOU généralisé** :

(8) $$E(\eta_\infty / \mathcal{S}) = \lim_n E(\eta_n / \mathcal{S}) \qquad \text{(P-p.s.)}$$

et η_∞ est intégrable ;

(d) si $(\eta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de vars intégrables tq $\Sigma_{n \in \mathbf{N}} |\eta_n| < \infty$, il existe une va intégrable η tq :

(9)
$$\eta = \Sigma_{n \in \mathbf{N}}\ \eta_n \qquad \text{(P-p.s.)},$$
$$E(\eta / \mathcal{S}) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}}\ E(\eta_n / \mathcal{S}) \qquad \text{(P-p.s.)} ;$$

(e) si $\mathcal{R}$ est une sous-tribu de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ une sous-tribu de $\mathcal{T}$, on a (commutativité du conditionnement) :

(10) $$E(\eta / \mathcal{S}) = E\{E(\eta / \mathcal{S}) / \mathcal{R}\} = E\{E(\eta / \mathcal{R}) / \mathcal{S}\}.$$

Notamment, si l'on considère les va $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ muni de la tribu $\mathcal{B}$) et $\psi : \varphi(\xi) : \Omega \mapsto F$ (F muni de la tribu $\mathcal{B}_F$), alors, en posant $\mathcal{S} = \xi^{-1}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{R} = \psi^{-1}(\mathcal{B}_F)$, on a :

(11) $$E(\eta / \varphi(\xi)) = E\{E(\eta / \xi) / \varphi(\xi)\} = E\{E(\eta / \varphi(\xi)) / \xi\} ;$$

(f) si η est intégrable et si ζ est $\mathcal{S}$-mesurable, alors le produit (numérique) $\eta \cdot \zeta$ est sommable ssi le produit $\zeta \cdot E(\eta / \mathcal{S})$ est sommable, et l'on a :

(12) $$E(\zeta \cdot \eta / \mathcal{S}) = \zeta \cdot E(\eta / \mathcal{S}) \qquad \text{(P-p.s.)}.$$

On peut ainsi relier espérance conditionnelle et **espérance marginale** selon :

(13) $E\,\eta = E_\xi\, E(\eta / \xi)$,

où (ξ, η) est un **couple aléatoire** à valeurs eg dans $\mathbf{R}^2$. La relation symétrique vaut aussi.

(vi) Dans l'espace $L_{\mathbf{K}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$), si $\mathcal{S}$ est une sous-tribu de $\mathcal{T}$, alors $L_{\mathbf{K}}^2(\Omega, \mathcal{S}, P)$ est un sous-**espace vectoriel** formé des (classes d'équivalence pour P de) va $\mathcal{T}$-mesurables dont au moins une est $\mathcal{S}$-mesurable.

On appelle **espérance conditionnelle** pr à $\mathcal{S}$ le **projecteur** orthogonal, noté $E(. / \mathcal{S})$ ou $E^{\mathcal{S}}$, de l'**espace de HILBERT** $L_{\mathbf{K}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sur $L_{\mathbf{K}}^2(\Omega, \mathcal{S}, P)$ (sous-espace fermé). Ainsi (lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), $\forall\, \eta \in L_{\mathbf{C}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $E(. / \mathcal{S})$ est définie par :

(14) $E\{E(\eta / \mathcal{S}) . \varepsilon\} = E(\eta . \varepsilon), \qquad \forall\, \varepsilon \in L_{\mathbf{C}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$,

ou aussi par :

(15) $\int_A \eta\, dP = \int_A E(\eta / \mathcal{S})\, dP, \qquad \forall\, A \in \mathcal{S}$.