ESTIMATEUR A DISTANCE MINIMALE
(04 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **estimateur à distance minimale** est un **estimateur à distance minimum** particulier, qui intervient notamment dans le cadre du **modèle linéaire**.

(i) La **méthode des moindres carrés généralisés** (mcg), appliquée au modèle suivant, écrit dans un **espace d'états** ou un **espace d'observation** (X, y) donné :

(1) $y = X b + u$, avec $E u = 0$ et $V u = \Sigma = \sigma^2 \Omega$,

suppose, en principe, que Σ (ou Ω) est connue.

Lorsque Σ (ou Ω) est inconnue, on peut définir un **estimateur à distance minimale** $b_S^\#$ de b s'il existe une **matrice** $S \in S_N(\mathbf{R}) \cap M_N^{++}(\mathbf{R})$ (**matrice symétrique** et **matrice définie positive**) tq :

(a) $\text{tr } S = N$ (cf **trace**) ;

(b) S est indépendante de (X, y).

La méthode consiste à remplacer Σ par S (supposée « proche » de Σ) dans les formules des moindres carrés généralisés. Ainsi, l'estimateur des mcg $b^\sim$ de b est remplacé par l'estimateur à distance minimale :

(2) $b_S^\# = (X' S^{-1} X)^{-1} X' S^{-1} y$.

(ii) On montre que $b_S^\#$ possède les propriétés suivantes :

(a) $E b_S^\# = b$, $\forall S \in S_N(\mathbf{R}) \cap M^{++}_N(\mathbf{R})$ (**estimateur sans biais**) ;

(b) $b_S^\#$ est la solution, unique, du **programme quadratique** suivant, qui est à l'origine de son nom :

(3) $\inf_{b \in \mathbf{R}K} (y - X b)' S^{-1} (y - X b)$;

(d) la vraie **dispersion** $V b_S^\#$ de $b_S^\#$ dépend, en général, de Ω. Par suite :

(4) $V b_S^\# - V b^\sim \geq 0$ (au sens des **formes quadratiques**),

où $b^\sim$ est l'**estimateur des mcg** de b lorsque Σ est supposée connue ;

(e) si l'on pose $||S - \Omega||^2 = \text{tr } (S - \Omega)^2$, on a (**lemme de proximité de O.N. STRAND**) :

(5) $||S - \Omega|| \leq \in \Rightarrow E ||y^\wedge - y^\sim|| \leq \varepsilon^2 / (2 \sigma^4)$,

où $y^\wedge = X\, b^\wedge$, où $b^\wedge$ est l'**estimateur des mco** de b, et $y^\sim = X\, b^\sim$, où $b^\sim$ est l'**estimateur des mcg** de b.

(iii) La méthode d'estimation à distance minimale précédente s'étend, au moins formellement, au **modèle non linéaire** :

(6) $y = F(b) + u,$ avec $E\, u = 0$ et $V\, u = \Sigma = \sigma^2\, \Omega,$

ainsi qu'au **modèle d'interdépendance**.

(iv) Une limitation de la méthode vient de ce que $V\, b_S^\#$ dépend de Ω : cette limitation intervient pour estimer la dispersion $V\, b_S^\#$ ou pour tester des **hypothèses statistiques** sur b.