ESTIMATEUR DE BAYES EMPIRIQUE (G3, H1)
(25 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Dans un **problème d'estimation** bayésien, la **loi a priori** Π du **paramètre** θ peut dépendre d'un paramètre $\lambda^{(1)} \in \Lambda^{(1)}$. Celui-ci peut, à son tour, être considéré comme aléatoire et suivre une loi $\Pi^{(1)}$ dépendant d'un paramètre $\lambda^{(2)} \in \Lambda^{(2)}$, etc. La procédure d'estimation de BAYES empirique permet de définir un estimateur adapté à ce problème en évitant la **complexité** dûe aux itérations précédentes (cf **problème de BAYES empirique**, **règle de BAYES empirique**).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ une **représentation statistique** paramétrique, avec $\Omega \subset \mathbf{R}^Q$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation** et $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}^N$ un **échantillon aléatoire**. On note $(\mathcal{X}^N, \mathcal{B}^{\otimes N}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ le **modèle image** et Π_λ la loi a priori de θ, définie sur une **tribu de parties** de Θ notée $\mathcal{B}_\Theta$, et supposée dépendre d'un paramètre (inobservable) $\lambda \in \Lambda$. On note, $\forall\ \theta \in \Theta$, $f = dP_\theta^X / d\mu$ la **densité** (ou **vraisemblance**) de P_θ^X pr à une **mesure positive** μ définie sur $\mathcal{B}^{\otimes N}$ et $\pi_\lambda = d\Pi_\lambda / d\nu$ la densité de Π_λ pr à une mesure positive ν définie sur $\mathcal{B}_\Theta$ (cf **dérivée de NIKODYM-RADON**).

(ii) La **procédure d'estimation de T. BAYES empirique** (du paramètre θ) procède comme suit :

(a) calcul de la **loi conditionnelle** de X sachant λ. La densité (ou **vraisemblance**) de cette loi s'écrit :

(1) $$g_\lambda(x) = \int f(x, \theta)\, d\Pi_\lambda(\theta) = \int f(x, \theta)\, \pi_\lambda(\theta)\, d\nu(\theta).$$

La **méthode du maximum de vraisemblance** ou la **méthode des moments** conduisent à un estimateur $L = l(X)$ de λ ;

(b) calcul de la **loi a posteriori** de θ conditionnellement au couple (X, λ), loi dont la densité s'écrit (cf **théorème de BAYES**) :

(2) $$q_\lambda(x, \theta) = f(x, \theta) \,.\, \pi_\lambda(\theta) / g_\lambda(x) ;$$

(c) calcul de la **règle de BAYES** (pure) $\delta_\lambda : \mathcal{X}^N \mapsto \Theta$ à l'aide du **risque de BAYES** associé à la loi a posteriori précédente. Cette règle dépend donc de λ. L'**estimateur de T. BAYES empirique** est alors défini par :

(3) $$T = t(X) = \delta_{l(X)}(X) \text{ ou } d_L(X),$$

ie en remplaçant λ par son estimateur L précédemment calculé.