ESTIMATEUR DE RAO (H1, J)
(10 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On considère un **modèle à variance composée** écrit, dans un **espace d'observation** (X, y), sous la forme :

(1) $y = X b + u$, avec $E u = 0$, $V u = \Sigma = \Sigma_{i=1}^{I} \alpha_i V_i$,

dans lequel $X \in M_{NK}$ (**R**) est la **matrice d'observation** (matrice des N observations des K variables exogènes), $b \in \mathbf{R}^K$, $\alpha = (\alpha_1 ,..., \alpha_I)' \in \mathbf{R}^I$ et $V_i \in D_N^{++}$ (**R**) (**matrices définies positives**), $\forall$ i $\in N_I$*. On suppose que X est observable (cf **observabilité**) et que les V_i sont connues (i = 1 ,..., I).

Le problème consiste à estimer le **paramètre** (b, α) et, en particulier, une **forme linéaire** donnée de α (eg $\alpha \mapsto \lambda = l ' \alpha$).

(ii) Une méthode consiste à définir un **estimateur quadratique** (pr à y) et sans biais $t_N : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}$ de λ (cf **estimateur sans biais**), ie :

(2) $t_N (y) = y' T y$,

où $T \in S_N$ (**R**) (**matrice symétrique**) vérifie les conditions :

$$(3) \quad \begin{cases} X' T X = 0, \\ tr (T \Sigma) = \lambda' \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}^I. \end{cases}$$

(iii) Une **norme** ||.|| étant donnée sur S_N (**R**), on appelle **estimateur (quadratique sans biais de norme minimum) de C.R. RAO** du paramètre $\lambda = l ' \alpha$ un estimateur $t_N^* = y' T^* y$ qui minimise ||T|| (ou $||T||^2$) dans la classe de tous les estimateurs quadratiques t_N de λ qui sont (a) sans biais et (b) invariants par translation.

(iv) L'estimateur de RAO t_N^* n'est pas un **estimateur strict** : il peut, en effet, être négatif (même si $\lambda \mapsto l ' \alpha$ est une forme linéaire non négative). Des variantes ou correctifs en ont été donnés (cf **correction**).

(v) La matrice $V u = \Sigma$ peut souvent s'interpréter comme suit. On suppose que u est une **perturbation** composée, ie :

(4) $u = \Sigma_{i=1}^{I} A_i v_i$,

où les matrices $A_i \in M_{NL(i)}$ (**R**) sont données et non aléatoires, où les L(i) désignent (par commodité) les dimensions L_i des v_i (i = 1 ,..., I) et où les **vecteurs aléatoires** v_i vérifient ($\forall$ i) les propriétés suivantes :

$$E\, v_i = 0, \quad \forall\, i \in N_I^*,$$

(5)

$$C\,(v_i\,,\, v_j) = E\, v_i\, v_j' = \delta_{ij}\, \sigma_i^2\, I_{L(i)}\,, \quad \forall\, (i, j) \in (N_I^*)^2.$$

Autrement dit :

$$V\, u = \Sigma_{i=1}^{I}\, \sigma_i^2\, A_i\, A_i',$$

(6)

$$V_i = A_i\, A_i', \quad \forall\, i \in N_I^*.$$

(vi) L'estimateur de RAO est donc un estimateur d'une combinaison linéaire des variances σ_i^2.

Le cadre précédent définit la **méthode de C.R. RAO**, qui permet d'estimer V u, donc d'étudier certains **modèles de régression** (**modèles linéaires**) pour lesquels la **méthode des moindres carrés généralisés** est appropriée, eg les modèles à deux **indices**, tel le modèle à **perturbation** composée (cf **modèle à erreurs composées**).