ESTIMATEUR DE STEIN (H5, J)
(05 / 12 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit :

(1) $y = X b + u, \qquad E u = 0 \text{ et } V u = \sigma^2 . I_N ,$

un **modèle de régression linéaire** exprimé dans un **espace d'observation** (X, y).

L'**estimateur des mco** $b^{\wedge} = (X' X)^{-1} X' y$ de b est le meilleur estimateur linéaire sans biais (**théorème de GAUSS-MARKOV**) et sa **matrice de dispersion** est $V b^{\wedge} = \sigma^2 (X' X)^{-1}$. Le carré de la longueur de $b^{\wedge}$ vaut, en « moyenne » :

(2) $E ||b^{\wedge}||^2 = ||b||^2 + \sigma^2 . \operatorname{tr} (X' X)^{-1}.$

Si X est quasi-colinéaire (ie X' X est quasi-singulière) (cf **quasi-colinéarité**), l'**écart** entre $E ||b^{\wedge}||^2$ et $||b||^2$ peut être important.

(ii) L'**estimateur de C. STEIN** est un **« estimateur rétréci »** de la forme :

(3) $b^{\#} = d . b^{\wedge}, \quad \text{avec} \quad d = 1 - \gamma . s^2 (b^{\wedge})' X' X (b^{\wedge}),$

où $s^2 = ||y - X b^{\wedge}||^2$ désigne la somme des carrés des résidus des mco) (cf **forme quadratique résiduelle**) et $\gamma > 0$ est une **constante** a priori quelconque.

Par construction, $b^{\#}$ est biaisé. Cependant il peut parfois être préféré à $b^{\wedge}$: en effet, sous certaines conditions, la réduction de variance qu'il permet compense l'augmentation du carré du **biais** : par suite, $b^{\#}$ domine $b^{\wedge}$ au sens du critère de l'**écart quadratique moyen** :

(4) $b^{\#} \succ b^{\wedge} \iff E ||b^{\#} - b||^2 \leq E ||b^{\wedge} - b||^2, \quad \forall b \in \mathbf{R}^K.$