ESTIMATEUR DE TYPE R (G)
(01 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $X = (X_1, ..., X_N)$ un **échantillon aléatoire** fini.

On appelle **R-estimateur**, ou **estimateur de rang**, un **estimateur** $T = t(X)$ de la forme :

(1) $T = t^*(R)$,

dans laquelle $R = (R_1, ..., R_N)$ est la **statistique de rang** associée à X. Autrement dit, en notant $R = r(X)$, on a $t = t^* \circ r$.

(ii) Deux exemples d'estimateurs de type R sont les suivants :

(a) **estimateur linéaire de rang** :

(2) $T_N = \Sigma_{n=1}^{N} a_{n\alpha}$,

où $a_{n\alpha} : \{1,..., N\}^2 \mapsto \mathbf{R}$ est une fonction donnée (cf **fonction score**).

En particulier, on a souvent $T_N = \Sigma_{n=1}^{N} b_n a_N(R_n)$, où les a_N sont des **scores** élémentaires ;

(b) estimateur dérivé du **test des rangs signés**. Ce test porte sur l'**hypothèse de base** $H_0 : \theta = \theta_0$ et se fonde sur la **statistique** :

(3) $S_N = s_N(X - \theta_0) = \Sigma_{n=1}^{N} \text{sgn}(X_n - \theta_0) . \varphi^+ R(\theta_0, N, n)$,

dans laquelle $(X_n)_{n=1,...,N}$ est une **suite** constituée de **vars**, $R(\theta_0, N, n) = R_{Nn}(\theta_0) / (N+1)$ et $R_{Nn}(\theta_0)$ désigne le **rang** de $|X_n - \theta_0|$ dans la suite $(|X_n - \theta_0|)_{n=1,...,N}$, $\varphi^+(t) = \varphi((t+1)/2)$, $\forall t \in]0, 1[$, φ étant une **fonction numérique** non décroissante, de carré intégrable et tq $\varphi(1-t) = - \varphi(t)$, $\forall t \in]0, 1[$.

Par suite, $E_{\theta 0} s_N(X - \theta_0) = 0$.

(iv) Un **estimateur de type R**, ou **R-estimateur**, **(au sens de J.L. HODGES - E.L. LEHMANN)** est une solution, notée R_N , de l'**équation estimante** déduite de (3) :

(4) $s_N(X - \theta_0) = 0$.

On obtient :

(5) $R_N = (R_N^- + R_N^+) / 2$,

avec $R_N^- = \inf \{\theta : s_N(X - \theta) < 0\}$ et $R_N^+ = \sup \{\theta : s_N(X - \theta) > 0\}$.

(v) Si l'**information de FISHER** existe (ie est finie) et si $(X_n)_{n=1,\ldots,N}$ est une **suite équidistribuée**, on montre que :

(6) $\mathscr{L}\,(N^{1/2}\,(R_N - \theta)) \to_{N\to\infty} \mathscr{N}\,(0, \sigma^2(\varphi, F))$ (**loi normale** centrée),

où F désigne la **fr** (commune) des X_n, et où :

(7) $\sigma^2\,(\varphi, F) = \{\int_{]0,1[}\ \varphi\,(F)\,.\,f'\,dt\}^{-2}\,.\,\{\int_{]0,1[}\ \varphi^2\,dt\}$,

expression dans laquelle $\varphi :]0, 1[\mapsto \mathbf{R}$ est une **fonction antisymétrique** (ie $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, les φ_i étant non décroissantes), de carré intégrable et à variation finie sur les intervalles de]0, 1[(cf **application antisymétrique**, **fonction à variation bornée**). On appelle parfois φ la **fonction génératrice de(s) score(s)**.