ESTIMATEUR DU SPECTRE (C5, H1, N)

L'**estimateur du spectre** d'un **processus stochastique** permet de préciser les périodicités ou les corrélations internes à ce processus (cf **période**, **corrélation**).

Il existe deux méthodes classiques pour estimer le **spectre d'un processus** :

(a) soit à partir du **périodogramme** (cf **fenêtre spectrale**) ;

(b) soit à partir du **corrélogramme**, cas examiné ici.

(i) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un **processus** réel scalaire (avec $T = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{R}$), qui est à la fois un **processus stationnaire en covariance** et un **processus indéterminable**. On note $x = (x_t)_{t=1,\ldots,T}$ une **trajectoire** (ou **série temporelle**) de X.

La **représentation spectrale de CRAMER** de la **fonction d'autocovariance** de X :

$$(1) \qquad \gamma_\theta = 2 \,.\, \int_0^\pi \cos(\omega\,\theta)\, f(\omega)\, d\omega$$

admet (**formule de réciprocité de J.B.J. FOURIER**) une **représentation inverse** (cf **formule d'inversion de FOURIER**) :

$$(2) \qquad f(\omega) = (2\,\pi)^{-1} \,.\, \{\gamma_0 + 2 \,.\, \Sigma_{\theta \in \mathbf{N}^*}\ \gamma_\theta \cos(\omega\,\theta)\}$$

appelée **densité spectrale**, ou **spectre**, de X.

(ii) La relation (théorique) (2) permet de définir divers estimateurs naturels de f (cf **statistique naturelle**).

Le plus direct est l'équivalent empirique « tronqué » de (2), ie (cf aussi **statistique naturelle**) :

$$(3) \qquad f^{\wedge}(\omega) = (2\,\pi)^{-1} \,.\, \{c_0 + 2 \,.\, \Sigma_{\theta=1}^{T-1}\ c_\theta \cos(\omega\,\theta)\},$$

dans lequel les coefficients c_θ sont les **autocovariances** empiriques :

$$(4) \qquad c_\theta = (T - \theta)^{-1} \,.\, \Sigma_{t=1}^{T-\theta}\ (x_t - \overline{x}_T)(x_{t+\theta} - \overline{x}_T).$$

Les défauts de (3) ont conduit à définir un estimateur de forme plus générale (cf **fenêtre spectrale**) :

$$(5) \qquad f^{\sim}(\omega) = (2\,\pi)^{-1} \,.\, \{c_0\, \alpha_0(\omega) + 2 \,.\, \Sigma_{\theta=1}^{T-1}\ c_\theta\, \alpha_\theta(\omega) \cos(\omega\,\theta)\},$$

parfois appelé **estimateur de E.J. HANNAN**. On peut en donner deux exemples :

(a) l'**estimateur de R.W. HAMMING - J.W. TUKEY**. Pour un entier $m \leq T - 1$, on pose :

$$(6) \qquad \alpha_\theta(\omega) = \begin{cases} (1/2) . \{1 + \cos(\pi\, \theta / m)\}, & \forall\, \theta \in N_m\,, \\ 0, & \forall\, \theta \in \{m, m+1, \ldots, T-1\}. \end{cases}$$

L'estimateur $f^{\sim}$ qui s'en déduit n'est pas un **estimateur strict** de f, car $f^{\sim}$ peut être négative ;

(b) l'**estimateur de E. PARZEN**. Pour un entier $m \leq T - 1$, on pose :

$$(7) \qquad \alpha_\theta(\omega) = \begin{cases} 1 - 6 . (\theta / m)^2 \{1 - (\theta / m)\}, & \forall\, \theta \in \{0, 1, \ldots, [m / 2]\}, \\ 2 . \{1 - (\theta / m)\}^3, & \forall\, \theta \in \{[m / 2], \ldots, m\}, \end{cases}$$

et l'on remplace c_θ par $c_\theta' = ((T - \theta) / T)\, c_\theta$ dans (5). Dans ce cas, $f^{\sim}$ est toujours positive.