ESTIMATEUR « SPLINE » DE LA DENSITÉ (A10, C5, H1)
(27 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **fonction spline** permet de définir une méthode d'**estimation non paramétrique** pour une **densité de probabilité**. L'estimateur correspondant est appelé **estimateur spline de la densité**. Un exemple simple en est le suivant.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** dont la **loi** P^{ξ} admet pr à λ_1 une **densité de probabilité** f à **support** compact : Supp f = [a, b] = I (cf **partie compacte**).

Soit X un N-**échantillon iid** comme ξ, dont la **fonction de répartition empirique** associée est notée $x \mapsto F_N(x) = N^{-1} . \Sigma_{n=1}^{N} u(x - X_n)$.

Soit $a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$ une subdivision de I et $S(F_N)$ une **fonction spline polynômiale** associée à F_N , ie une fonction dont la **restriction** à chaque $I_j = [x_j , x_{j+1}]$ est un polynôme qui interpole F_N entre les points x_j et x_{j+1} , $\forall j \in N_{k-1}$ (cf **interpolation**).

On appelle **estimateur « spline » de la densité** f la **dérivée** $S_f(x)$ de $S(F_N)$, ie :

(1) $\quad S_f(x) = D(S(F_N)(x)), \qquad \forall x \in I.$

Si l'on pose $\varphi(x, t) = \mathbf{1}_{[a,t]}(x)$, $\forall (t, x) \in I^2$, et si l'on appelle **noyau « spline »** chaque dérivée pr au second argument :

(2) $\quad K(x, t) = D_2 S(\varphi_x)(t),$

où $S(\varphi_x)$ est la fonction spline associée à la seconde application partielle $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x, t)$, l'estimateur spline de f s'explicite selon :

(3) $\quad f_N(t) = N^{-1} . \Sigma_{n=1}^{N} K(X_n , t), \qquad \forall t \in I.$

(ii) Sous certaines hypothèses, portant notamment sur la subdivision $(x_j)_{j=0,1,...,k}$, on montre la convergence dans L^1 (resp dans L^2) de f_N (cf **convergence dans L^p**) ainsi que sa **normalité asymptotique** (ie lorsque $N \to +\infty$).

(iii) Les résultats précédents se généralisent à une densité multidimensionnelle, ie à une densité associée à la **loi** d'un **vecteur aléatoire** ξ.