ÉTATS D'UNE CHAÎNE DE MARKOV (N2)
(03 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Les **états** d'une chaîne de MARKOV se prètent à une classification standard. On distingue entre chaînes en temps discret et en temps continu.

(i) Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **chaîne de MARKOV** en **temps** discret ($T = \mathbf{N}$), à **espace d'état** $\mathscr{X}$ fini (eg $\mathscr{X} = \{x_1, ..., x_k\}$) et à **probabilités de transition** stationnaires. Le processus est donc déterminé par la **loi initiale** :

(1) $\quad p_x = P([X_0 = x]), \quad \forall x \in \mathscr{X},$

et par les probabilités de transition (stationnaires) :

(2) $\quad P_{xy} = P([X_{n+1} = y] / [X_n = x]),$

élément de la (k,k)-**matrice stochastique** $P = (P_{xy})_{(x,y)}$ (avec $P\, e_k = e_k$).

On dit alors que :

(a) un état $x \in \mathscr{X}$ est un **état transitoire** ssi, lorsque $X_0 = x$, la **probabilité de retour** en x est inférieure à 1.

Si $\mathcal{E}_t$ est l'ensemble des états transitoires de la chaîne, la définition se formalise selon :

(3) $\quad x \in \mathcal{E}_t \Leftrightarrow P([X_n = x] / [X_0 = x]) < 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,$

et vaut encore lorsque $\mathscr{X}$ est un espace d'états dénombrable ;

(b) un état y est un **état récurrent** ssi, lorsque $X_0 = y$, la probabilité de retourner en y est égale à 1.

Si $\mathcal{E}_r$ est l'ensemble des états récurrents, la définition se formalise selon :

(4) $\quad y \in \mathcal{E}_r \Leftrightarrow P([X_n = y] / [X_0 = y]) = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$;

(c) dans $\mathcal{E}_r$, deux états x et y sont des **états communicants** (ou que x et y « communiquent » entre eux, ou encore que x communique avec y) ssi l'on peut, à la fois, aller de x à y et de y à x : on note alors $x \approx y$ (ou $x \leftrightarrow y$) la **relation de communication**.

Cette relation est une **relation d'équivalence** sur $\mathcal{E}_r$, et il existe un entier $H \in N_k^*$ tq la **suite** $\{R_1, ..., R_H\}$ de **parties** de $\mathcal{E}_r$ forme une **partition** $\Pi_{\mathcal{E}r}$ de $\mathcal{E}_r$ (en notant $\mathcal{E}$r pour désigner $\mathcal{E}_r$). Pour tout h $\in N_H^*$, R_h est appelée **classe de récurrence**. Si le processus X commence dans la classe de récurrence R_h (ie si $X_0 \in R_h$), alors il reste P-presque sûrement dans R_h ($\forall$ h $\in N_H^*$) : P ($[X_n \in R_h]$) = 1, $\forall$ n $\in$ **N***.

Les définitions valent encore lorsque X est dénombrable : il existe alors un ensemble (au plus) dénombrable de classes de récurrence, ie une partition (au plus) dénombrable de $\mathcal{X}$.

Par suite :

(5) $\mathcal{X} = \mathcal{E}_r \cup \mathcal{E}_t$, ou encore $(\cup_{h=1}^{H} R_h) \cup \mathcal{E}_t$;

(d) un état $x \in \mathcal{X}$ est un **état absorbant** ssi X, une fois entré dans cet état, ne peut plus le quitter, ie :

(6) $P_{xy} = P([X_{n+1} = y] / [X_n = x]) = 0, \qquad \forall (x, y)$ tq $y \neq x$,

n étant le premier temps à partir duquel $X_n = x$. On a aussi $P_{xx} = 1$ (puisque P est une **matrice stochastique**).

X est appelé **chaîne absorbante** ssi il est possible d'atteindre un état absorbant x à partir de n'importe quel état y.

(ii) Soit $(X_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ une chaîne de MARKOV en temps continu (T = $\mathbf{R}_+$), à espace d'états fini $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_k\}$, et dont les **matrice de transition** P (t) = $(P_{xy}(t))_{(x,y)}$ sont définies par :

(7)
$$P_{xy}(t) = P([X_t = y] / [X_0 = x]), \qquad \forall t \neq 0,$$
$$P_{xy}(0) = \lim_{t \to 0+} P_{xy}(t) = \delta_{xy}, \qquad (\text{ie } \lim_{t \to 0+} P(t) = I_k),$$

où δ_{xy} désigne le **symbole de KRONECKER** et I_k la matrice unité d'ordre k.

Alors :

(a) (b) les notions d'**état transitoire** et d'**état récurrent** se définissent comme en temps discret ;

(c) on dit que x et y sont des **états communicants** ssi il existe un couple (s, t) $\in \mathbf{R}_+^2$ d'instants tq :

(8)
$$P_{xy}(s) > 0,$$
$$P_{yx}(t) > 0.$$

Comme dans le cas discret, la relation de communication $\approx$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}_r$ qui définit l'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{X} / \approx = \{R_1, ..., R_H\} = \Pi_{\mathcal{E}r}$.

Si l'on pose :

(9) $\quad Q = \lim_{t \to 0+} (P(t) - I_k) / t$

(**dérivée** de P (t) à l' « origine »), on montre que P et Q vérifient :

(a) $P(s+t) = P(s) . P(t), \forall (s, t) \in \mathbf{R}_+^2$;

(b) $Q_{xx} \leq 0, \forall x \in \mathcal{X}$, et $Q_{xy} \geq 0, \forall (x, y)$ tq $y \neq x$;

(c) $Q e_k = 0$, où $= (1 ,..., 1)'$;

(d) les **équations différentielles de A.N. KOLMOGOROV** (cf **équations de KOLMOGOROV**) :

(10)
$$P'(t) = Q P(t) \quad (\textbf{équation arrière}),$$
$$P'(t) = P(t) Q \quad (\textbf{équation avant}),$$

dont la solution est $P(t) = e^{Q t}$.

Ce qui précède vaut encore si l'espace d'état $\mathcal{X}$ est lui-même dénombrable (eg si $\mathcal{X} = \mathbf{N}$). Cependant, pour éviter des situations non régulières, on ajoute l'hypothèse :

(11) $\quad |Q_{xx}| < +\infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}$.

Un tel état est dit **état stable** de la chaîne. On a alors :

(12)
$$P'(t) \geq Q P(t),$$
$$P'(t) \geq P(t) Q.$$