FAMILLE COMPLÈTE (DE LOIS, DE PROBABILITÉS) (B, C, G1)
(27 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle statistique** image, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation** et $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **va** donnée (eg un **échantillon**). On note $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^{\xi})_{\theta \in \Theta}$ le **modèle image** associé au modèle précédent.

On dit que $(P_\theta^{\xi})_{\theta \in \Theta}$ est une **famille de probabilités complète**, ou parfois une **famille de probabilités totale**, associée au modèle précédent ssi elle vérifie la propriété suivante (cf aussi **totalité**) :

(1) $\forall\ \theta \in \Theta, \forall\ \varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^{1}(\Omega, \mathcal{B}, P_\theta^{\xi}),\ \int \varphi\, dP_\theta^{\xi} = 0 \ \Rightarrow\ \varphi = 0\ (P_\theta^{\xi}\text{-p.s.}).$

Si l'on note E_θ l'opérateur **espérance mathématique** (ie $E_\theta\, \varphi = \int \varphi\, dP_\theta^{\xi}$), la propriété (1) s'écrit aussi :

(2) $\forall\ \theta \in \Theta, \forall\ \varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^{1}(\Omega, \mathcal{B}, P_\theta^{\xi}),\ E_\theta\, \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0\ (P_\theta^{\xi}\text{-p.s.}).$

(ii) Une fonction φ vérifiant (1) ou (2) est parfois appelée **fonction essentiellement nulle**, ou **fonction presque sûrement nulle**, pour la famille des probabilités considérées.

(iii) Les définitions précédentes se transcrivent directement :

(a) à la famille des **mesures de probabilité** P_θ associées au modèle initial $(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$;

(b) au cas où la famille $(P_\theta^{\xi})_{\theta \in \Theta}$ n'est pas munie d'un **paramètre** explicite (cf **paramétrisation**). Avec une famille $\mathcal{P}^{\xi}$ quelconque, on écrit :

(3) $\forall\ P^{\xi} \in \mathcal{P}^{\xi}, \forall\ \varphi \in L_{\mathbf{R}}^{1}(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), P),\ E_{P\xi}\, \varphi = \int \varphi\, dP^{\xi} = 0 \ \Rightarrow\ \varphi = 0\ \ (P^{\xi}\text{-p.s}).$