FAMILLE ÉQUI-INTÉGRABLE (DE FONCTIONS) (A5)
(03 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit (E, $\mathscr{A}$, μ) un **espace mesuré** et $p \geq 1$.

On dit que la **famille** $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^p(E,\mathscr{A},\mu)$ est une **famille équi-intégrable de fonctions** de puissance p-ième intégrable, ou une **famille p-équi-intégrable de fonctions**, ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(a) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0$ tq :

(1) $A \in \mathscr{A}$ et $\mu(A) \leq \eta \ \Rightarrow\ \sup_{f \in \mathscr{H}} \int \mathbf{1}_A |f|^p \, d\mu \ \leq\ \varepsilon$;

(b) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, B \in \mathscr{A}$ tq :

(2) $\mu(B) < +\infty$,

$\sup_{f \in \mathscr{H}} \int \mathbf{1}_{E \setminus B} |f|^p \, d\mu \leq \varepsilon$.

(ii) On montre que :

(a) s'il existe une **fonction numérique** positive $g \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^p(E,\mathscr{A},\mu)$ qui domine $\mathscr{H}$, ie tq $|f| \leq g$, $\forall\, f \in \mathscr{H}$, alors $\mathscr{H}$ est p-équi-intégrable ;

(b) si $\mathscr{H} = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une **suite** de fonctions tq $f_n \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^p(E,\mathscr{A},\mu)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, et s'il existe une fonction $f_\infty \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^p(E,\mathscr{A},\mu)$ tq (en notant $\mathscr{L}$p pour désigner $\mathscr{L}^p$) :

(3) $f_n \rightarrow^{\mathscr{L}p} f_\infty$

(convergence en moyenne d'ordre p pour la **semi-norme**), alors $\mathscr{H}$ est équi-intégrable (cf aussi **distance en moyenne d'ordre p**, **convergence dans L^p**).

(iii) Si (E, $\mathscr{A}$, μ) est un **espace probabilisé** noté (Ω, $\mathscr{T}$, P), et si $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^p(\Omega,\mathscr{T},P)$, la notion d'équi-intégrabilité s'applique, en particulier, aux **vars** $\xi \in \mathscr{H}$ (cf **équi-intégrabilité**).