**FAMILLE EXPONENTIELLE (C7, G)**
(03 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **famille exponentielle** est une classe de **lois de probabilité** possédant des propriétés intéressantes pour l'étude des modèles statistiques.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ un **modèle statistique**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace probabilisable** et $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **va** donnée. On note $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta}$ le modèle image qui s'en déduit. On suppose que :

(a) $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$ $(K \geq 1)$ et $\Theta = \mathbf{R}^Q$ (avec $Q \leq K$) ;

(b) $\mu$ est une **mesure abstraite** positive donnée, définie sur $\mathcal{B}$ $(\mathbf{R}^K)$ (cf **mesure positive**) ;

(c) $t : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}^Q$ est une **application mesurable** (**statistique**).

On dit alors que la **famille** des lp $(P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta}$ est une **famille exponentielle** (G. DARMOIS - B.O. KOOPMAN - E.J.G. PITMAN) ssi chaque loi $P_\theta^\xi$ admet pr à $\mu$ une **densité** (**dérivée de NIKODYM-RADON**) de la forme :

(1) $$f(x, \theta) = dP_\theta^\xi(x) / d\mu(x) = c(\theta) . h(x) . e^{< \theta, t(x) >},$$

dans laquelle :

(a) $c : \mathbf{R}^Q \mapsto \mathbf{R}^*_+$ et $h : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}^*_+$ sont des **applications mesurables** ;

(b) $< u, v > = \Sigma_q u_q v_q$ dénote le **produit scalaire** euclidien usuel de $\mathbf{R}^Q$ (cf **espace euclidien**).

On dit que $\theta$ est le **paramètre naturel** de la famille.

Une famille exponentielle peut se représenter sous des formes voisines, eg :

(2) $$f(x, \theta) = c(\theta) . h(x) . e^{< g(\theta), t(x) >},$$

(3) $$f(x, \theta) = e^{\varphi(\theta) + < g(\theta), t(x) > + \psi(x)},$$

(4) $$f(x, \theta) = h(x) . e^{\alpha \circ g(\theta) + < g(\theta), t(x) >},$$

formes dans lesquelles :

(a) $\Theta = \mathbf{R}^S$ (avec $1 \leq S \leq Q$) ;

(b) $g : \mathbf{R}^S \mapsto \mathbf{R}^Q$ est une application mesurable ;

(c) $\varphi : \mathbf{R}^S \mapsto \mathbf{R}$, $\psi : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}$ et $\alpha : \mathbf{R}^Q \mapsto \mathbf{R}$ sont des fonctions mesurables.

(ii) Dans la forme initiale (1), on peut toujours se ramener à une famille exponentielle dans laquelle h = 1 (fonction identiquement égale à 1) en changeant de mesure, ie en remplaçant $\mu$ par la mesure $\nu = h \cdot \mu$ (mesure de densité h pr à $\mu$). La forme résultante est parfois appelée **forme canonique** de la famille.

Lorsque Q = 1 (ou S = 1), on parle de **modèle exponentiel à paramètre scalaire**.

(iii) On montre que le **modèle produit** (ou **modèle d'échantillonnage**) $\{(\mathscr{X}, \mathscr{B}, P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta}\}^{\otimes N}$ admet une **statistique exhaustive** pour le **paramètre** naturel $\theta$. Cette statistique est $T_N = t_N(X)$, ie est définie par l'application mesurable t selon :

$$(5) \qquad T_N = t_N(X_1, \ldots, X_N) = \Sigma_n \, t(X_n),$$

où, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $X_n$ est une **copie** de la **variable parente** $\xi$ (ie $X = (X_1, \ldots, X_N)$ est un **échantillon iid** issu de l'une des **lois** parentes $P_\theta^\xi$).

(iv) Si un modèle statistique possède des **densités** f (. , $\theta$) dont le support Supp f (. , $\theta$) = $S_\theta$ dépend du paramètre $\theta$ (cf **support d'une fonction**), ce modèle ne peut pas être exponentiel. En effet, cette densité peut s'écrire identiquement sous la forme :

$$(6) \qquad f = \mathbf{1}(S_\theta) \,.\, f,$$

où **1**(A) désigne ici la **fonction indicatrice** d'une **partie** A, et ne peut donc se mettre sous la forme (1).

On appelle alors **famille exponentielle généralisée** une famille de **lois de probabilité** dont la densité est de la forme :

$$(7) \qquad f(x, \theta) = \mathbf{1}(S_\theta)(x) \,.\, c(\theta) \,.\, h(x) \,.\, e^{<\theta,\, t(x)>},$$

ou de l'une des formes (2) à (4) précédentes, multipliées par la fonction indicatrice du support $S_\theta \subset \mathbf{R}^K$.

Par exemple :

$$(8) \qquad f(x, \theta) = \mathbf{1}(S_\theta)(x) \,.\, c(\theta) .\, h(x) \,.\, \exp\{\Sigma_{q=3}^{Q} \, g_q(\theta) \,.\, t_q(x)\},$$

avec $S_\theta = [g_1(\theta), g_2(\theta)]$.

(v) Des exemples usuels de familles exponentielles sont :

(a) la famille des **lois binômiales** $\mathscr{B}(N, p)$ ;

(b) la famille des **lois gamma** $\gamma_\nu(0, b)$ ;

(c) la famille des **lois normales** $\mathscr{N}_N(\mu, \Sigma)$.