FAMILLE HOMOGÈNE (DE LOIS, DE PROBABILITÉS) (B, C)
(23 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La notion habituelle d'**homogénéité** diffère de celle relative aux probabilités ou aux lois. Cette dernière reçoit la signification suivante.

(i) Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un **espace probabilisable** et $\mathscr{P}$ une **famille** quelconque de **mesures de probabilité** sur $\mathscr{T}$.

On dit que $\mathscr{P}$ est une **famille homogène de probabilités**, ou une **famille de probabilités homogène**, ssi toute probabilité domine toute autre, ie ssi :

(1) $\quad P' \ll P'', \quad \forall (P', P'') \in \mathscr{P}^2.$

On dit aussi que $\mathscr{P}$ est une **famille homogène** ssi toutes ses probabilités ont les mêmes ensembles négligeables, ie :

(2) $\quad \mathscr{N}(P) = \mathscr{N}^*, \quad \forall P \in \mathscr{P},$

où $\mathscr{N}(P)$ dénote la **classe des parties P-négligeables** de Ω et $\mathscr{N}^*$ la famille des ensemble P-négligeables.

Lorsque $P' \ll P''$ et $P'' \ll P'$, on dit que P' et P" sont des **probabilités équivalentes**. Une famille $\mathscr{P}$ est donc homogène ssi tous ses éléments sont équivalents.

(ii) Si $\mathscr{P}$ est une famille homogène, elle est alors une famille dominée (cf **famille dominée de lois**), car l'**homogénéité** équivaut à l'existence d'une **mesure abstraite** positive σ-finie μ sur $\mathscr{T}$ tq :

(3) $\quad P \ll \mu, \forall P \in \mathscr{P}, \quad$ et $\quad dP / d\mu > 0 \ (\mu\text{-p.p.}),$

où $dP / d\mu$ est la **dérivée de NIKODYM-RADON** (**densité**) de P pr à μ.

(iii) Ce qui précède vaut notamment lorsque $\mathscr{P}$ et paramétrable sous la forme $\mathscr{P} = (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Alors, (1) devient :

(1)' $\quad P_\theta \ll P_\tau , \quad \forall (\theta, \tau) \in \Theta^2.$

(iv) Tout ce qui précède s'applique, mutatis mutandis, aux familles de **lois de probabilité**.