FONCTION À VARIATION BORNÉE (A4, A10)
(18 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit **I** = [a, b] un segment de **R** et (E, ||.||) un **espace vectoriel normé** sur **R**.

On dit que la fonction f : **I** $\mapsto$ E est une **fonction à variation finie** (resp une **fonction à variation bornée**) ssi, pour toute **subdivision** $S_n = \{x_0, ..., x_n\}$, avec $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$, de **I**, l'**ensemble** S des sommes suivantes, appelées **variations finies** de f :

(1) $S_n = \Sigma_i \ ||f(x_i) - f(x_{i-1})||$

est un ensemble fini (ie S $\subset$ **R**) (resp borné).

Si f est à variation bornée, on appelle **variation totale** de f la borne de S :

(2) $V_I(f)$ ou $V_{a,b}(f) = \sup S$.

(ii) On montre que :

(a) si $c \in]a, b[$, alors $V_{a,b}(f) = V_{a,c}(f) + V_{c,b}(f)$;

(b) si E = **R**, toute fonction à variation bornée f est la différence de deux fonctions croissantes g et h, eg : $g(x) = V_{a,x}(f)$ et $h(x) = g(x) - f(x)$, $\forall x \in$ **R**.