

FONCTION CARACTÉRISTIQUE (PREMIÈRE -) (C5)

(26 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **transformée de FOURIER** joue un grand rôle dans l'étude :

- (a) de la **loi de probabilité** d'une **variable aléatoire** ;
- (b) de la convolution de telles lois (cf **produit de convolution**) ;
- (c) de l'**indépendance stochastique** ;
- (d) des **processus stochastiques** (eg **représentation de LÉVY**).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}^K}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **vecteur aléatoire** réel dont la **loi de probabilité** est notée P^ξ (où $\mathbf{R}^K$ désigne, par commodité, $\mathbf{R}^K$).

On appelle (**première**) **fonctions caractéristique** (fc) de P^ξ (resp de ξ) la fonction $\varphi : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{C}$ définie selon :

$$(1) \quad t \in \mathbf{R}^K \mapsto \varphi_\xi(t) = \int_{\mathbf{R}^K} e^{i t' x} dP^\xi(x) \in \mathbf{C},$$

où $t' x = \sum_{k=1}^K t_k x_k$ (**produit scalaire** euclidien dans $\mathbf{R}^K$) et $\mathbf{R}^K$ désigne $\mathbf{R}^K$.

On appelle parfois **transformation caractéristique** de P^ξ (ou de ξ) l'application $P^\xi \mapsto \varphi$.

Pour mettre en évidence l'association de φ avec P^ξ (resp ξ), φ est notée φ_{P^ξ} ou φ_ξ .

Ainsi, la fc n'est autre que la **transformée de FOURIER** de P^ξ (considérée comme **mesure réelle** bornée) :

$$(2) \quad \varphi_{P^\xi} = \mathcal{F}(P^\xi) \quad (\text{ou } \varphi = \mathcal{F}).$$

On définit parfois φ en remplaçant dans (1) l'imaginaire pur i par $-i$.

(ii) Si P^ξ admet une **densité** de probabilité f pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_K de $\mathcal{B}(\mathbf{R}^K)$ (resp si F est la **fonction de répartition** associée à P^ξ), on dit aussi que φ est la fc de f (resp de F), avec :

$$(3) \quad \varphi(t) = \int_{\mathbf{R}^K} e^{i t' x} f(x) d\lambda_K(x) = \int_{\mathbf{R}^K} e^{i t' x} dF(x).$$

Lorsqu'aucune confusion n'en résulte, on note simplement φ au lieu de φ_ξ (resp φ_{P^ξ}).

(iii) La première fc s'interprète comme l'**espérance mathématique** de la **va** (complexe) $e^{i t' \xi}$, ie :

$$(4) \quad \varphi(t) = E e^{it\xi} = \int_{\mathbf{R}^K} e^{it\xi} dP.$$

La définition s'étend directement en remplaçant λ_K par une **mesure abstraite** positive quelconque dominant P^ξ .

(iv) Parmi les nombreuses propriétés de φ , on peut citer les suivantes :

(a) lorsque $K = 1$:

$$(a)_1 \quad |\varphi(t)| \leq 1, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \text{ et } \varphi(0) = 1 ;$$

$$(a)_2 \quad \varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita} \varphi_\xi(bt), \quad \forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall t \in \mathbf{R} ;$$

$$(a)_3 \quad \text{si } \varphi(t) \in \mathbf{R}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \text{ alors } P^\xi \text{ est une } \mathbf{loi symétrique} \text{ pr à } 0 \text{ (ie } P^{-\xi} = P^\xi \text{)} ;$$

(a)₄ $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ (**ensemble** des fonctions continues $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$) (cf **application continue**) ;

(a)₅ si ξ et η sont des **vars** indépendantes (cf **indépendance**), alors $\varphi_{\xi+\eta} = \varphi_\xi \cdot \varphi_\eta$ (produit ordinaire des fonctions) ;

(a)₆ si $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}^p}(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\forall p \geq 1$, la **dérivée** $D^j \varphi$ existe $\forall j \in N_p^*$ et :

$$(5) \quad (D^j \varphi(t))_{t=0} = i^j \cdot E \xi^j, \quad \forall j \in N_p^*,$$

ce qui permet de calculer les moments non centrés μ_i de ξ jusqu'à l'ordre p (si $p \in 2\mathbf{N}^*$) ou jusqu'à l'ordre $p-1$ (si $p \in 2\mathbf{N}+1$) (cf **moment centré**) ;

(b) lorsque $K = 2$, si $\xi = (\xi', \xi'')$ est de puissance p -ième intégrable, on a :

$$(6) \quad \{(\partial^{r+s} / (\partial u_r \partial v_s)) \varphi(u, v)\}_{(u,v)=(0,0)} = i^{r+s} \cdot E \{(\xi')^r \cdot (\xi'')^s\} ;$$

(c) dans le cas général (K quelconque dans $\mathbf{N}^*$) :

(c)₁ $\varphi : \xi \mapsto \varphi_\xi$ (resp $P^\xi \mapsto \varphi_{P^\xi}$) est une **application injective**, ie $\varphi_\xi = \varphi_\eta \Leftrightarrow \xi = \eta$ (P-p.s.) (resp $\varphi(P^\xi) = \varphi(P^\eta) \Leftrightarrow P^\xi = P^\eta$) ;

(c)₂ la fc permet de calculer les **moments algébriques** de la va ξ . Ainsi, lorsque $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}^K}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, φ admet le développement de B. TAYLOR d'ordre 2 suivant au **voisinage** de zéro :

$$(7) \quad \varphi(t) = 1 - i 2 \pi \{t' \cdot E \xi\} - 2 \pi^2 \{t' (E \xi \xi') t\} + o(\|t\|^2).$$

Plus généralement, on a $\varphi_\xi(t) = \varphi_{t\xi}(1)$ et, si $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}^K}^p(\Omega, \mathcal{T}, P)$, on obtient :

$$(8) \quad \{D^{||j||} \varphi_\xi(t)\}_{t=0} = i^{||j||} \cdot E \{\xi_1^{j(1)} \dots \xi_K^{j(K)}\}, \quad \forall j : ||j|| \leq p,$$

avec $j = (j_1, \dots, j_K)$ et $|j| = \sum_{k=1}^K j_k \leq p$, en notant $j(k)$ pour désigner j_k ($\forall k \in N_K^*$) ;

(c)₃ la fc de la **projection** $pr_{1\dots S} \xi = (\xi_1, \dots, \xi_S)$ (avec $S \leq K$) (**fonction caractéristique marginale**) est donnée par la relation :

$$(9) \quad \varphi_{pr_{1\dots S} \xi}(pr_{1\dots S} t) = \varphi_\xi(t_1, \dots, t_S, 0, \dots, 0).$$

où $pr_{1\dots S} \xi$ désigne $pr_{1\dots S} \xi$.

Ceci est encore vrai après **permutation** de t ;

(c)₄ si ξ est à valeurs dans $\mathbf{R}^K$ et η dans $\mathbf{R}^G$, en notant f_ζ la fc du **couple aléatoire** $\zeta = (\xi, \eta) : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K \times \mathbf{R}^G$, l'**indépendance** de ξ et de η équivaut à l'**identité** suivante (produit ordinaire des fonctions) :

$$(10) \quad \varphi_\zeta(t, u) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(u), \quad \forall (t, u) \in \mathbf{R}^K \times \mathbf{R}^G,$$

où φ_ξ (resp φ_η) est la fc marginale de ξ (resp de η), avec $\varphi_\xi(t) = \varphi_\zeta(t, 0)$ et $\varphi_\eta(u) = \varphi_\zeta(0, u)$, $\forall (t, u)$;

(c)₅ $|\varphi(t)| \leq 1$, $\forall t \in \mathbf{R}^K$, et $\varphi(0) = 1$;

(c)₆ $\varphi_{a+B\xi}(t) = e^{it'a} \varphi_\xi(Bt)$, où $a \in \mathbf{R}^K$ et $B \in M_{LK}(\mathbf{R})$, avec $L \leq K$;

(c)₇ $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^K, \mathbf{C})$ (ensemble des fonctions continues) ;

(c)₈ soit F la **fr** de ξ , φ sa fc. On pose $\|x\|_\infty = \sup_{k=1}^K |x_k|$, $\forall x \in \mathbf{R}^K$, et $B_\infty(0, r) = \{x \in \mathbf{R}^K : \|x\|_\infty \leq r\}$ (**boule** de centre 0 et de rayon $r > 0$). Alors, $\forall \alpha \in]0, 1[$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(P1) \quad 1 - \text{Ré}(\varphi(t)) = O(\|t\|_\infty^\alpha) \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0,$$

$$(P2) \quad 1 - \varphi(t) = O(\|t\|_\infty^\alpha) \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0,$$

$$(P3) \quad \int \mathbf{1}(B^c)(x) \cdot dF(x) = O(r^{-\alpha}) \quad \text{lorsque } r \rightarrow +\infty,$$

où $B^c = \{B(0, r)\}^c$ et $\mathbf{1}(A)$ est la **fonction indicatrice** d'une **partie** A .

(v) Soit $\mathcal{F}^\xi$ une **famille** quelconque de **lp** P^ξ , $\mathcal{F}$ la famille des fr associées et Φ celle des fc associées.

On dit que :

(a) $\mathcal{F}$ est une **famille stable par convolution** ssi :

$$(11) \quad (F_1, F_2) \in \mathcal{F}^2 \Rightarrow F_1 * F_2 \in \mathcal{F},$$

(b) Φ est une **famille stable (pour le produit ordinaire des fonctions)** ssi :

$$(12) \quad (\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi^2 \Rightarrow \varphi_1 \cdot \varphi_2 \in \Phi.$$

Si les variables ayant pour lois les $P^\xi \in \mathcal{P}^\xi$ sont des v.a. indépendantes, on a alors l'équivalence entre :

(a) $\mathcal{F}$ est stable pour le produit de convolution $*$
et

(b) Φ est stable pour le produit (ordinaire) des fonctions.

(vi) A titre d'exemples classiques, on montre que :

(a) si $P^\xi = \delta_a$ (**loi de DIRAC** au point $a \in \mathbf{R}^K$), alors $\varphi(t) = e^{i t' a}$;

(b) si $P^\xi = \mathcal{P}(\lambda)$ (**loi de POISSON**), alors $\varphi(t) = \exp \{ \lambda (e^{-2i\pi t} - 1) \}$;

(c) si $P^\xi = \gamma_\nu(0,1)$ (**loi gamma**), alors $\varphi(t) = (1 - i t)^{-\nu}$;

(d) si $P^\xi = \mathcal{N}_K(\mu, \Sigma)$ (**loi normale**), alors $\varphi(t) = \exp \{ i t' \mu - \frac{1}{2} t' \Sigma t \}$, avec, en particulier, $\varphi(t) = \exp \{ i t \mu - \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 \}$ lorsque $K = 1$ et $P^\xi = \mathcal{N}_1(\mu, \sigma^2)$. Si $\mu = a$ et $\sigma \rightarrow 0+$, on retrouve (a) ;

(e) si $P^\xi = \mathcal{C}(0, 1)$ (**loi de CAUCHY**), alors $\varphi(t) = e^{-|t|}$.